ORTAÖĞRETİM

Matematik 10

DERS KİTABI

YAZARLAR

Mehmet MAVİŞ
Güray GÜL
Himmet SOLAKLIOĞLU
Hakan TARKU
Fatih BULUT
Mahmut GÖKŞEN



DEVLET KİTAPLARI
İKİNCİ BASKI
.........................., 2019

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6667
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1742

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Gonca AYIK

Dil Uzmanı
Gülendam KARACA ÇETİN

Program Geliştirme Uzmanı
Hasan NASIRCI

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Hüseyin BÜYÜKBİÇER

Rehberlik ve Gelişim Uzmanları
Tuğba GÜL ŞEN

Görsel Tasarım Uzmanı
Taykut CENGİZ

Grafik Tasarım Uzmanı
Volkan NUR

ISBN 978-975-11-4600-7

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 28.05.2018 gün ve 78 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 28.05.2019 gün ve 10443977 sayılı yazısı ile ikinci defa 204.889 adet basılmıştır.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

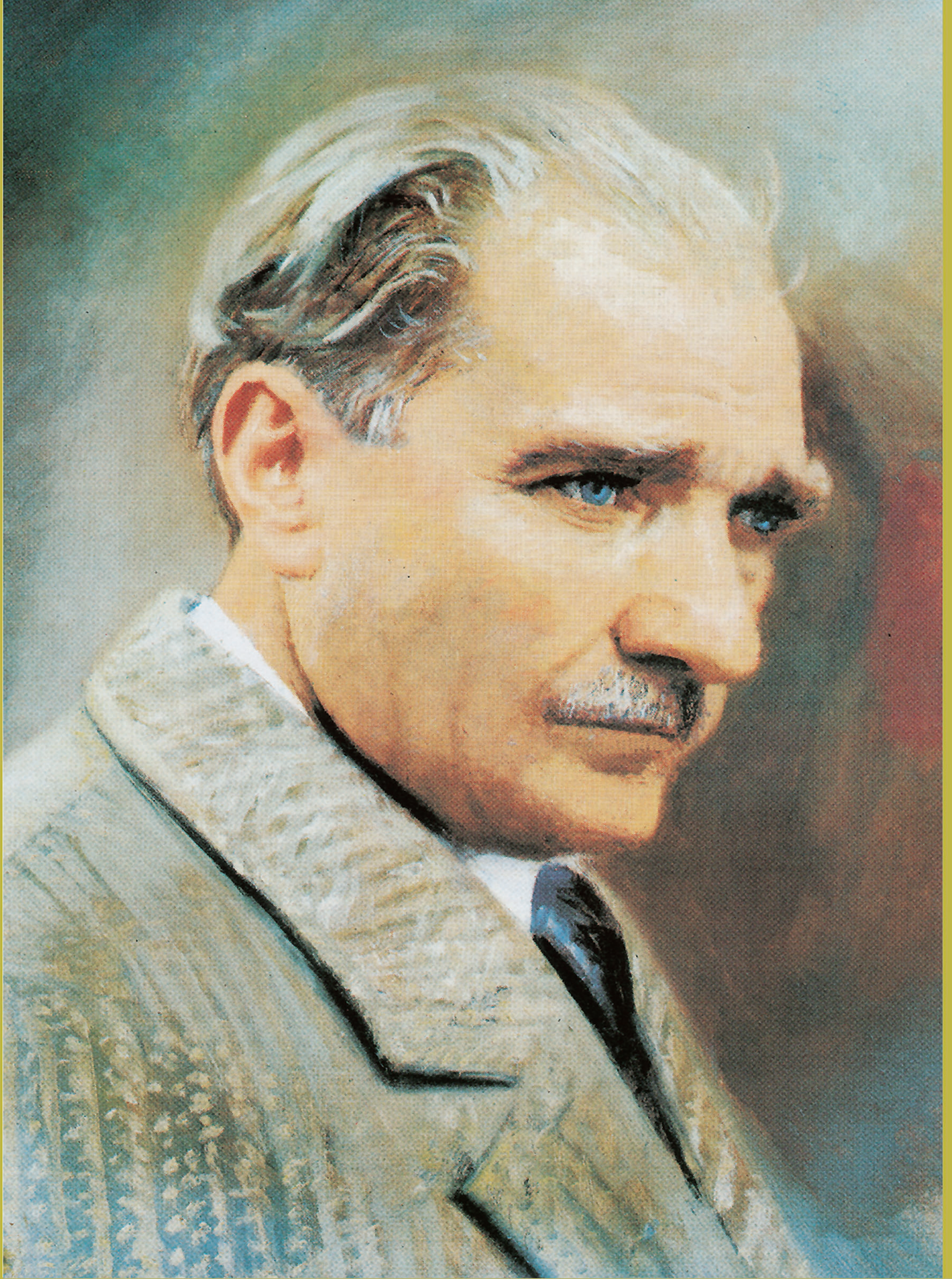
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIN TANITIMI 10
SEMBOL VE GÖSTERİMLER 12

10.1. SAYMA VE OLASILIK 13

10.1.1. Sıralama ve Seçme 15
10.1.1.1. Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma 15
ALIŞTIRMALAR 24
10.1.1.2. Permütasyon (Sıralama) 25
ALIŞTIRMALAR 27
10.1.1.3. Tekrarlı Permütasyon 28
ALIŞTIRMALAR 31
10.1.1.4. Kombinasyon (Seçim) 32
ALIŞTIRMALAR 47
10.1.1.5. Pascal Üçgeni 48
ALIŞTIRMALAR 49
10.1.1.6. Binom Açılımı 50
ALIŞTIRMALAR 55

10.1.2. Basit Olayların Olasılıkları 56
10.1.2.1. Örnek Uzay, Deney, Çıktı, Bir Olayın Tümleyeni, Kesin Olay, İmkânsız Olay, Ayrık Olay ve Ayrık Olmayan Olay 56
ALIŞTIRMALAR 62
10.1.2.2. Olasılık Kavramı İle İlgili Uygulamalar 63
ALIŞTIRMALAR 69
ALIŞTIRMALAR 71
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1 72
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2 75
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3 77

10.2. FONKSİYONLAR 79

10.2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi 81
10.2.1.1. Fonksiyonlarla İlgili Problemler 81
ALIŞTIRMALAR 94
ALIŞTIRMALAR 109
10.2.1.2. Fonksiyonların Grafikleri 110
ALIŞTIRMALAR 115
10.2.1.3. Grafiği Verilen Fonksiyonlar ile İlgili Problemler 116
ALIŞTIRMALAR 120
10.2.1.4. Doğrusal Fonksiyonlarla Modellenebilen Günlük Hayat Durumları 121
ALIŞTIRMALAR 122

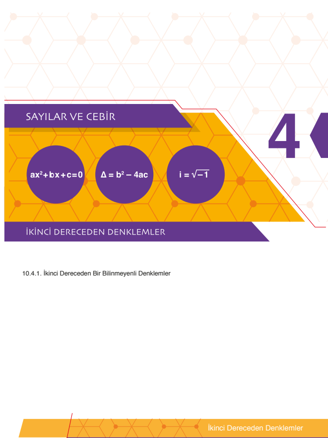
10.2.2. İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi 123
10.2.2.1. Bire Bir ve Örten Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar 123
ALIŞTIRMALAR 125
10.2.2.2. Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi 126
ALIŞTIRMALAR 132
10.2.2.3. Fonksiyonun Tersi 133
ALIŞTIRMALAR 141
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1 142
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2 145
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3 148

10.3. POLİNOMLAR 151



10.3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler 154
10.3.1.1. Bir Değişkenli Polinom Kavramı 154
ALIŞTIRMALAR 162
10.3.1.2. Polinomlarla Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri 163
ALIŞTIRMALAR 172
10.3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması 174
10.3.2.1. Bir Polinomu Çarpanlarına Ayırma 174
ALIŞTIRMALAR 183
10.3.2.2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi 184
ALIŞTIRMALAR 187
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1 188
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2 191

10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER 193



10.4.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler 195
10.4.1.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem Kavramı..196
10.4.1.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü 199
ALIŞTIRMALAR 211
10.4.1.3. Bir Karmaşık Sayının $a + ib \ (a, b \in \mathbb{R})$ Biçiminde İfade Edilmesi 212
ALIŞTIRMALAR 216
10.4.1.4. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Kökleri İle Katsayıları Arasındaki İlişki 217
ALIŞTIRMALAR 224
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 225

10.5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER 229



10.5.1. Çokgenler 231
10.5.1.1. Çokgen ve Çokgende Açı Kavramı 232
ALIŞTIRMALAR 239
10.5.2. Dörtgenler ve Özellikleri 240
10.5.2.1. Dörtgenin Temel Elemanları ve Özellikleri 240
ALIŞTIRMALAR 246
10.5.3. Özel Dörtgenler 247
10.5.3.1. Özel Dörtgenlerin Açı, Kenar, Köşegen ve Alan Özellikleri 247
ALIŞTIRMALAR 260
ALIŞTIRMALAR 272
ALIŞTIRMALAR 277
ALIŞTIRMALAR 283
ALIŞTIRMALAR 289
ALIŞTIRMALAR 298
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1 299
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2 301
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3 304
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4 307

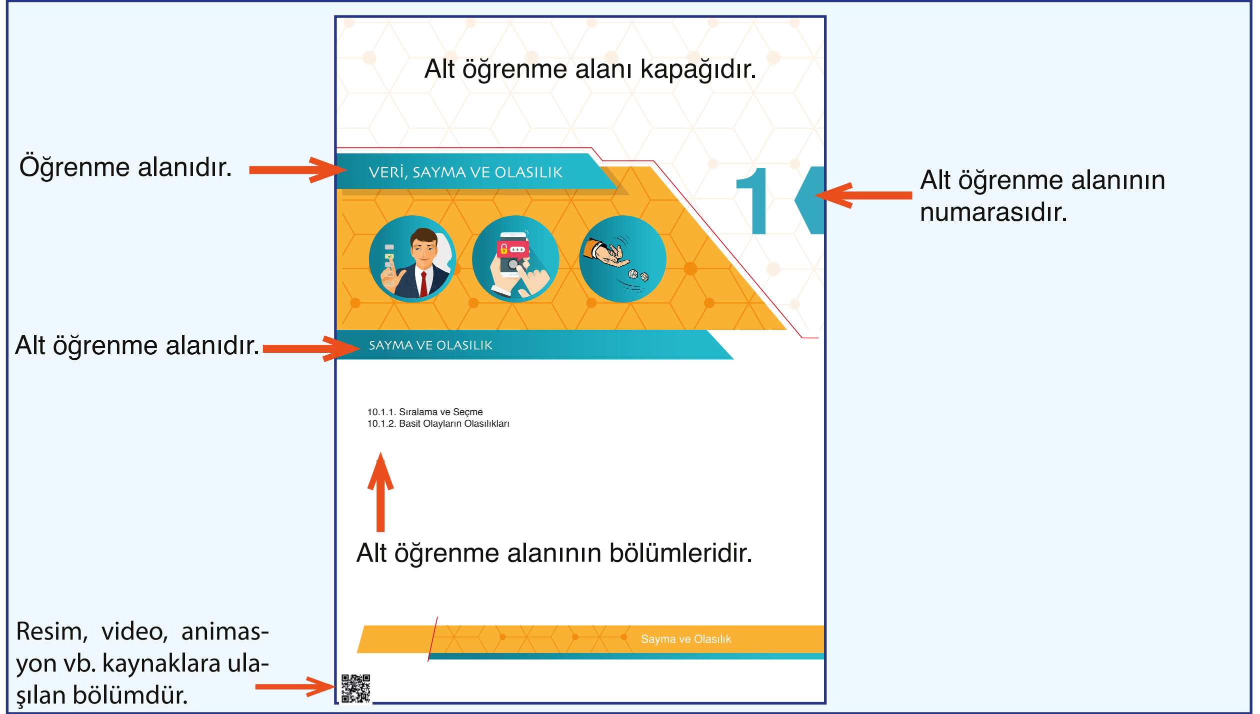
10.6. UZAY GEOMETRİ 309



10.6.1. Katı Cisimler 311
10.6.1.1. Dik Prizma ve Dik Piramit 312
ALIŞTIRMALAR 319
ALIŞTIRMALAR 333
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1 334
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2 337
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3 340

CEVAP ANAHTARI 343
SÖZLÜK 347
KAYNAKÇA 349

KİTABIN TANITIMI





Hazırlık Çalışması

Alt öğrenme alanıyla ilgili önceki bilgileri içeren soruların bulunduğu bölümdür.

1. (1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), ... yandaki sıralı ikililerin birinci ve ikinci bileşenleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

Terim ve kavramların bulunduğu bölümdür.

Terimler ve Kavramlar
- Fonksiyonların Bileşkesi
- Fonksiyonun Tersi
- Yatay Doğru Testi

Sembol ve Gösterimler
- fog, f^{-1}

Sembol ve gösterimlerin bulunduğu bölümdür.



Bilgi

Tabanı düzgün çokgen olan dik piramitlere **düzgün piramit** denir. Düzgün piramitte yanal ayrıtlar eştir. Bu durumda yan yüzler birbirine eş ikizkenar üçgen belirtirler.

Tanım, teorem ve bilgilerin verildiği bölümdür.



Neler Öğreneceksiniz?

Çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

Hangi kazanımların öğrenileceğinin sıralandığı bölümdür.

Formül ve ipuçlarının verildiği bölümdür.



İpucu

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı n^m dir.



Buluyorum

k bir sabit sayı olmak üzere $\frac{ax+b}{cx+d}=k \Rightarrow ax+b=kcx+kd \Rightarrow (a-kc)x+b-kd=0$ eşiliğinin sağlanabilmesi için $a-kc=0$ ve $b-kd=0$ olmalıdır. Buradan $a=kc \Rightarrow k=\frac{a}{c}$ ve $b=kd \Rightarrow k=\frac{b}{d}$ elde edilir. Buradan $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ olduğu görülür.

Formül ve ipuçlarının doğruluğunun gösterildiği bölümdür.

Örneklerin bulunduğu bölümdür.



Örnek 2

$(a-1)x^3+x^{2b-4}+(a+b)x+a \cdot b=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.



Çözüm

$(a-1)x^3+x^{2b-4}+(a+b)x+a \cdot b=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğundan x^3 lü terimin katsayısı sıfır, x^{2b-4} lü terimin üssünün 2 olması gerekir. Dolayısıyla
$a-1=0 \Rightarrow a=1$ ve $2b-4=2 \Rightarrow b=3$ olur.

Örneklerin çözümlerinin bulunduğu bölümdür.



Bilim İnsanları



Blaise Pascal (Bleyz Paskal)

Fransa'da doğan Blaise Pascal (Bleyz Paskal) (1623-1662), matematiğe ve geometriye olan büyük ilgisi nedeniyle daha 12 yaşındayken geometri üzerinde çalışmaya başladı. Babası vergi toplayıcısı olarak atandığında vergileri toplamasına yardımcı olmak amacıyla 1642-1645 yılları arasında üç yıl çalışarak ilk sayısal hesap makinesi olan ve "Pascalin" adı verilen cihazı icat etti. Daha sonra fizik ve matematik üzerine çalışmaya başladı. 1653'te sıvıların dengeleri üzerine hazırladığı tez ile Pascal, basınç ile ilgili kanununu ortaya koydu. Bu tez, bilim insanlarınca bilim tarihinde hidrostatik sistemin tam bir taslağı ve Pascal'ın fizik teorisine yaptığı en önemli katkı olarak kabul edildi. Pascal ayrıca geometride koniklerle ilgili birçok teorem geliştirdi. Pascal üçgeni, matematikte binom katsayılarını içeren üçgensel bir dizidir.

Ünlü matematikçi Pascal, aritmetik üçgen üzerine bir tez yazmış; burada üçgenin özelliklerini ortaya koymuştur. Ancak Pascal, bu üçgeni çizen veya inanılmaz özelliklerini fark eden ilk kişi değildir. Üçgenin bu özellikleri kendi zamanına kadar birçok medeniyet tarafından bulunmuş, bu üçgen farklı adlarla ifade edilmiştir. Örneğin Hintli matematikçiler bu üçgeni "Meru Dağı'nın Merdivenleri", Çinli matematikçiler "Yang Hui üçgeni", İranlı matematikçiler ise "Hayyam üçgeni" olarak adlandırmışlardır. Pascal'dan daha önce, 10. yüzyılda Hintli matematikçiler bu sayı dizisini şiirin ölçülerindeki kısa ve uzun seslerin birleşimlerinin sayısını temsil etmek için kullanmışlardır. Sonraki yüzyıllarda Batı dünyasında bilimin gelişmesi ile bu üçgen günümüzde Fransız matematikçi ve filozof Pascal'ın adıyla anılmaktadır.

Üçgen, 11. yüzyılda İran'da yaşayan ünlü gökbilimci, şair, filozof ve matematikçi olan Ömer Hayyam'ın yazılarında da görülmüştür. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki terimlerin katsayıları ile oluşturulan şemanın (Pascal üçgeni) Ömer Hayyam'a ait olduğu ileri sürülmektedir. Hayatını bilimsel araştırmalara adamış olan Ömer Hayyam'ın analitik geometrinin gelişimi üzerindeki etkisi çok büyüktür. Hayyam aynı zamanda irrasyonel sayıların da rasyonel sayılar gibi kullanılabileceğini ilk defa kanıtlamıştır. İrrasyonel sayıların varlığını göstererek Öklidyen olmayan geometrilerin olduğunu ifade etmiştir. Hayyam, $x^3+200x=20x^2+200$ şeklindeki kübik denklemin pozitif x değerlerini (köklerini) bulmuştur. Bu çözümünü geometrik olarak da konik kesiti olarak da ortaya koymuştur. Üçüncü dereceden denklemleri de kapsayan birçok cebirsel denklemi sınıflandırmış ve bunlara çözüm yolu bulmuştur. Cebirsel denklemlerin çözümünü konikleri kesiştirerek bulmaya çalışmış ve bunu bir metoda çevirmek için uğraşmıştır. içinde sınıflandırmıştır. Her biri için genel çö.

Ömer Hayyam heykeli

Bilim insanlarının hayatlarının ve çalışmalarının tanıtıldığı bölümdür.

Düşünüyorum

Türk alfabesindeki her harfin sırasının değiştirilmesi ile tersten şifreleme yapılsın. Yani A harfi yerine Z harfi, B harfi yerine Y harfi kullanılsın. Örneğin MASA sözcüğü KZGZ şeklinde şifrelenir.
Siz de aşağıdaki ifadeyi yukarıdaki şifre çözme yöntemini kullanarak çözünüz.

PZBZEÖJ FOŞĞTGOJO KZETKZEOM ÜIATĞ

İlginç ve yararlı bilgilerin bulunduğu bölümdür.

Alıştırmaların bulunduğu bölümdür.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen fonksiyonların terslerinin fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=2x+7$

2. Aşağıda verilen fonksiyonların terslerinin eşleştirme kuralını bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f: A \to B$ ile gösterilir.
A kümesine ....kümesi, B kümesine ....kümesi denir.

2. $f: A \to B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye bu fonksiyonun .... kümesi denir.

Ölçme ve değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$n!$	:	n faktöriyel
$P(n, r)$	:	n elemanlı bir kümenin r elemanlı permütasyonlarının sayısı
$C(n, r)$	:	n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı
$\binom{n}{r}$	:	n elemanlı bir kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı
E	:	Evrensel küme
$P(A)$	:	A olayının olasılığı
$P(A')$	:	A olayının olmama olasılığı
$f: A \rightarrow B$	:	A kümesinden B kümesine fonksiyon
$f(A)$	:	A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$y = f(x)$	:	x i y ile eşleyen f fonksiyonu
$f + g$	:	f ve g fonksiyonlarının toplamı
$f - g$	:	f ve g fonksiyonlarının farkı
$f \cdot g$	:	f ve g fonksiyonlarının çarpımı
$\frac{f}{g}$	:	f ve g fonksiyonlarının bölümü
f	:	Fonksiyon
I	:	Birim fonksiyon
fog	:	g ve f fonksiyonunun bileşkesi
f^{-1}	:	f fonksiyonunun tersi
$P(x)$	:	Polinom
$\triangle$	:	Diskriminant
i	:	Sanal (imajiner) sayı birimi
$a + ib$	:	Karmaşık sayı
z	:	Karmaşık sayı
$\overline{z}$	:	Karmaşık sayının eşleniği
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık sayılar kümesi
İm(z)	:	imajiner kısım
Re(z)	:	Reel kısım
Ç(ABCD)	:	ABCD dörtgeninin çevresi
A(ABCD)	:	ABCD dörtgeninin alanı



VERİ, SAYMA VE OLASILIK

1







SAYMA VE OLASILIK

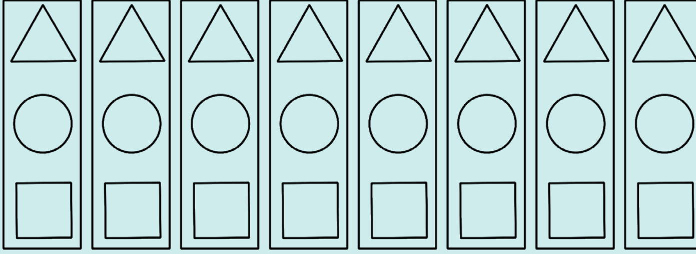
10.1.1. Sıralama ve Seçme
10.1.2. Basit Olayların Olasılıkları

10.1. SAYMA VE OLASILIK



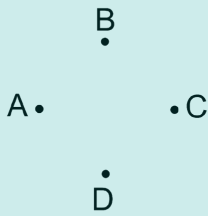
Hazırlık Çalışması

1.



Yanda verilen △, ○, □ şekillerinin içi kırmızı, turuncu ya da mavi renkleriyle her bir şeklin farklı renkte olması koşuluyla boyanarak desenler elde edilecektir. Bu şekilde kaç farklı desen elde edilebileceğini şekil üzerinde uygulama yaparak bulunuz.

2.



Yandaki şekilde verilen 4 noktanın 3 ünü seçerek köşeleri bu noktalardan oluşan üçgenler çiziniz ve bu yolla oluşturulabilecek üçgen sayısını bulunuz.



İçinde bulunduğumuz yüzyıl; büyük teknolojik gelişmelerin yaşandığı, herhangi bir bilgiye çok hızlı bir şekilde ulaşılabilen bilgi çağıdır.

Geçmiş dönemlerde kasalarda fiziksel olarak saklanan birçok şey günümüzde dijital ortamda, dijital şifrelerle saklanmaktadır. Örneğin önceleri kasalarda saklanan altın, döviz gibi değerli nesneler günümüzde daha çok internet bankacılığı aracılığıyla dijital ortamda altın veya döviz hesabında saklanmaktadır.

Bu çağın en önemli ögesi bilgidir. Günümüzde bilgiye ulaşmanın kolaylığı göz önünde bulundurulduğunda kişisel bilgilerin saklanması çok önemli bir hâle gelmiştir. Bu bilgilerin saklanmasında kullanılan şifrelerin çok kuvvetli yani kolay tahmin edilemeyecek, başkaları tarafından çözülemeyecek zorlukta olması gerekmektedir. Böyle bir şifrenin oluşturulmasında sayma ve olasılık konularında bilgi sahibi olunması büyük kolaylık sağlar.

Rakamlar arasından seçilen 3 haneli bir şifre için 1000 farklı durum varken rakamlar ve Türk alfabesinin harfleri arasından seçilen 3 haneli bir şifre için 59 319 farklı durum vardır. Rakamlar, Türk alfabesinin harfleri ve 8 farklı simge arasından seçilen 3 haneli bir şifre için ise 103 823 farklı durum vardır. Bu şekilde oluşturulan şifrelerin başkası tarafından tahmin edilmesi oldukça zordur.

10.1.1. Sıralama ve Seçme

Terimler ve Kavramlar

- Toplama Yöntemi
- Çarpma Yöntemi
- Faktöriyel
- Permütasyon
- Tekrarlı Permütasyon
- Kombinasyon
- Pascal Üçgeni
- Binom Açılımı

Sembol ve Gösterimler

- $n!$, $P(n, r)$, $C(n, r)$, $\binom{n}{r}$



Neler Öğreneceksiniz?

- Olayların gerçekleşme sayısını toplama ve çarpma yöntemlerini kullanarak hesaplamayı,
- n çeşit nesne ile oluşturulabilecek r li dizilişlerin (permütasyon) kaç farklı şekilde yapılabileceğini hesaplamayı,
- Sınırlı sayıda tekrarlayan nesnelerin farklı dizilişlerini (permütasyon) ve bu dizilişlerin sayılarını hesaplayarak problemler çözmeyi,
- n elemanlı bir kümenin r tane elemanlı alt kümelerinin (kombinasyon) kaç farklı biçimde oluşturulabileceğini göstermeyi,
- Pascal (Paskal) üçgeni ve binom açılımını kavramayı öğreneceksiniz.

10.1.1.1. Toplama ve Çarpma Yöntemlerini Kullanarak Sayma

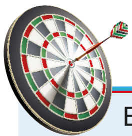
İlk sayıların insanın sayma gereksiniminden ortaya çıktığı, akşamları hayvanlarının tam olup olmadığını anlamak isteyen insanlar tarafından kullanıldığı iddia edilmektedir. Tam anlamıyla bir sayı kavramına sahip olmayan bu insanlar, bunu çitten geçen her bir hayvan için başlangıçta boş olan keseye bir çakıl taşı koyarak yapmışlardır. Günümüzde Hint-Avrupa dillerinde "hesap" anlamında kullanılan **kalkülüs** sözcüğü Latincede "çakıl taşı" anlamına gelmekteydi. Böylece her çakıl taşı bir hayvanla eşleşmiştir. Zamanla ortaya çıkan yeni ihtiyaçlar sonucunda sayı kavramı gelişmiş ve sayma işi için farklı yöntemler de kullanılmaya başlanmıştır.

Sayma işleminin farklı yöntemlerle yapılabiliyor olması insanlara bazı kolaylıklar sağlamıştır. Örneğin her rafında 10 kitap bulunan 5 raflı bir kitaplıktaki kitap sayısı hesaplanırken aşağıdaki yollardan biri kullanılabilir.

- Her kitap tek tek sayılarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı 50 olarak bulunabilir.
- 5 defa 10 sayısı toplanarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı $10+10+10+10+10=50$ olarak bulunabilir.
- 5 ile 10 çarpılarak kitaplıktaki toplam kitap sayısı $5 \cdot 10 = 50$ olarak bulunabilir.

Bu yöntemlerden çarpma yoluyla saymanın diğerlerine göre daha hızlı saymayı sağladığı görülmektedir. Fakat her sayma işlemi için çarpma yolunun kullanılması uygun olmayabilir. Örneğin 10 kız, 15 erkek öğrenciden oluştuğu bilinen bir sınıfın mevcudu hesaplanırken uygun olan yöntem, toplama yoluyla saymadır. Herhangi bir sınıftaki erkek öğrenci sayısının bulunmasında ise eşleme yoluyla sayma yapılmalı ve her erkek öğrenci 1 den başlanarak bir ardışık pozitif tam sayı ile eşlenmelidir.

Sonuç olarak uygun sayma yönteminin kullanılması bu yöntemi kullanan kişilere zaman kazandırıp kişilerin hayatlarında kolaylık sağlar.



Bilgi

Bir kümenin elemanlarını, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları ile sıralı olarak bire bir eşleyerek bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir.



Bilgi

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için bu kümelerin eleman sayıları toplanır. Bu yöntemle saymaya **toplama yoluyla sayma** denir. A ile B sonlu ve ayrık iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.



Örnek 1

Bir vazoda bulunan 4 gül ve 5 karanfil arasından 1 gül veya 1 karanfilin kaç farklı biçimde alınabileceğini bulunuz.



Çözüm

Güllerin oluşturduğu kümeye G kümesi denilirse $s(G) = 4$ olur. Karanfillerin oluşturduğu kümeye ise K kümesi denilirse $s(K) = 5$ olur. $s(G \cup K) = s(G) + s(K) = 4 + 5 = 9$ bulunur. Bu durumda bu vazodan 1 gül veya 1 karanfil 9 farklı biçimde alınabilir.



Bilgi

$A \times B$ kümesinin elemanları olan (x, y) sıralı ikililerinin sayısı $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere $m \cdot n$ adet olur. Sıralı ikililerin sayısını bu şekilde bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.



Örnek 2

Her birinde 8 kitap bulunan 14 kolide kaç kitap olduğunu bulunuz.



Çözüm

Koliler kümesi 14 elemanlı bir küme ve kitaplar kümesi 8 elemanlı bir kümedir.
1. kolideki 1. kitap (1, 1) ile
1. kolideki 2. kitap (1, 2) ile
...
1. kolideki 8. kitap (1, 8) ile
...
14. kolideki 1. kitap (14, 1) ile
14. kolideki 2. kitap (14, 2) ile
...
14. kolideki 8. kitap (14, 8) ile gösterildiğinde
bu sıralı ikililerin sayısı, çarpma yoluyla sayma yöntemine göre koliler kümesindeki eleman sayısı ile kitaplar kümesindeki eleman sayısının çarpımı olan $14 \cdot 8 = 112$ adet olur. Kitapların sayısı ile sıralı ikililerin sayısı aynı olduğundan kitap sayısı 112 adet olur.

Saymanın Temel İlkesi



İpucu

k tane olayın gerçekleştiği bir olaylar dizisinde birinci olay n_1 farklı biçimde, ikinci olay n_2 farklı biçimde ve bu şekilde devam edildiğinde k ninci olay n_k farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu olayların tamamı $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir.



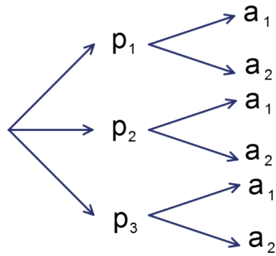
Örnek 3

Farklı 3 pantolonu ve farklı 2 çift ayakkabısı olan Oğuz Bey'in bir pantolon ve bir çift ayakkabıyı kaç farklı biçimde giyebileceğini bulunuz.



Çözüm

1. yol
Pantolonların oluşturduğu kümeye P kümesi ve pantolonlara p_1, p_2, p_3 isimleri verilirse $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ olur. Ayakkabıların oluşturduğu kümeye A kümesi ve ayakkabılara a_1, a_2 isimleri verilirse $A = \{a_1, a_2\}$ olur. $s(P) = 3$ ve $s(A) = 2$ olduğundan Oğuz Bey bir pantolon ve bir ayakkabıyı $3 \cdot 2 = 6$ farklı biçimde giyebilir.
2. yol



Yandaki ağaç diyagramıyla sorunun çözümü aşağıdaki gibi yapılabilir.
Şekildeki oklar soldan sağa takip edilerek
$P \times A = \{(p_1, a_1), (p_1, a_2), (p_2, a_1), (p_2, a_2), (p_3, a_1), (p_3, a_2)\}$
kümesi elde edilir. $s(P \times A) = 6$ olduğundan Oğuz Bey 1 pantolon ve 1 ayakkabıyı 6 farklı biçimde giyebilir.



Örnek 4

3 farklı bilyenin 5 farklı kutuya,

a) Kaç farklı biçimde atılabileceğini bulunuz.

b) Her kutuda en çok bir bilye olmak koşuluyla kaç farklı biçimde atılabileceğini bulunuz.



Çözüm

a) 1. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde,
2. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde,
3. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde atılabilir.
Saymanın temel ilkesine göre 3 farklı bilye 5 farklı kutuya $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ farklı biçimde atılabilir.

b) 1. bilye 5 kutudan herhangi birine 5 farklı biçimde,
2. bilye kalan 4 kutudan herhangi birine 4 farklı biçimde,
3. bilye ise kalan 3 kutudan herhangi birine 3 farklı biçimde atılabilir.
Bu durumda 3 farklı bilye 5 farklı kutuya her kutuda en çok bir bilye olmak koşuluyla $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı biçimde atılabilir.



Örnek 5

Bir sesli harf ve bir çift rakamdan oluşan kaç farklı sıralı ikili yazılabileceğini bulunuz.

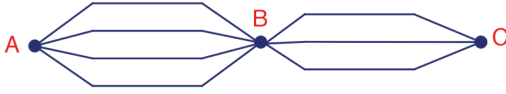


Çözüm

Sesli harflerin oluşturduğu kümeye A kümesi, çift rakamların oluşturduğu kümeye B kümesi denilirse $A = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$ ve $s(A) = 8$ olur. $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $s(B) = 5$ olur.
Birinci bileşeni bir sesli harf, ikinci bileşeni bir çift rakam olan sıralı ikililerin sayısı bulunurken saymanın temel ilkesi gereği bu iki sayı çarpılır. Dolayısıyla $s(A \times B) = 8 \cdot 5 = 40$ olur.
Birinci bileşeni bir çift rakam, ikinci bileşeni ise bir sesli harf olan sıralı ikililerin sayısı $s(B \times A) = 5 \cdot 8 = 40$ olur. Koşula uyan toplam sıralı ikili sayısı $40 + 40 = 80$ olur.



Örnek 6



Yukarıdaki çizgiler A, B ve C şehirleri arasındaki yolları temsil etmektedir. Buna göre A şehrinden harekete başlayıp şekildeki yolları kullanan bir aracın B şehrine uğramak koşuluyla

a) C şehrine kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz.

b) Kaç farklı şekilde C şehrine gidip tekrar A şehrine dönebileceğini bulunuz.

c) Giderken kullandığı yolları dönüşte kullanmamak koşuluyla kaç farklı şekilde C şehrine gidip A şehrine dönebileceğini bulunuz.



Çözüm

a) A ile B şehirleri arasında 4 farklı, B ile C şehirleri arasında 3 farklı yol bulunduğundan araç, A şehrinden C şehrine $4 \cdot 3 = 12$ farklı şekilde gidebilir.

b) A ile B şehirleri arasında 4 farklı, B ile C şehirleri arasında 3 farklı yol ve dönüşte C ile B şehirleri arasında 3 farklı yol, B ile A şehirleri arasında 4 farklı yol bulunduğundan araç, $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ farklı yoldan A şehrinden C şehrine gidip dönebilir.

c) A ile C şehirleri arasını $4 \cdot 3$ farklı yoldan giden araç, dönüşte ise giderken kullandığı yolları tekrar kullanmayacağından $(3-1) \cdot (4-1) = 2 \cdot 3$ farklı yoldan döner. Böylece koşula uygun toplam gidiş dönüş sayısı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ olur.



Örnek 7

Bir okulda 7 nöbetçi öğretmenin bulunduğu bir günde dördüncü ders saatinde 3 sınıfın dersi boştur. Bu derslerin boş geçmemesi amacıyla dersi boş olan sınıfların her birine bir nöbetçi öğretmen girecektir. Buna göre nöbetçi öğretmenlerin bu sınıflara kaç farklı şekilde girebileceğini bulunuz.



Çözüm

Dersi boş olan üç sınıftan birine 7 nöbetçi öğretmenden herhangi biri 7 farklı şekilde,
dersi boş olan kalan iki sınıftan birine kalan 6 nöbetçi öğretmenden herhangi biri 6 farklı şekilde,
dersi boş olan kalan sınıfa kalan 5 nöbetçi öğretmenden herhangi biri 5 farklı şekilde girebilir.
Saymanın temel ilkesine göre 7 nöbetçi öğretmen boş olan 3 sınıfa $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ farklı şekilde girebilir.



Örnek 8

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olarak veriliyor. A kümesinin elemanlarını kullanarak

a) Üç basamaklı kaç farklı doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

b) Üç basamaklı kaç farklı **çift** doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

c) 200 ile 500 arasında kaç farklı doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.

ç) 240 ile 600 arasında kaç farklı **tek** doğal sayının yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

Yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların yüzler, onlar ve birler basamağı soldan sağa doğru sırasıyla birer kutu şeklinde gösterilip bu kutuların içine belirttiği basamağa gelebilecek rakam yazılır.

a)

6	6	6
↓	↓	↓
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Her basamakta A kümesine ait her rakam kullanılabileceğinden koşula uyan $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ tane üç basamaklı doğal sayı yazılabilir.

b) Yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların çift olması için birler basamağına 2, 4, 6 rakamlarından herhangi biri gelir. Diğer basamaklara ise A kümesindeki her eleman yazılabileceğinden

6	6	3
↓	↓	↓
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{2, 4, 6\}$

$6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ tane çift doğal sayı yazılabilir.

c) Yazılabilecek üç basamaklı doğal sayıların 200 ile 500 arasında olması için yüzler basamağına 2, 3 ve 4 rakamlarından herhangi biri gelmelidir. Diğer basamaklara ise A kümesindeki her eleman yazılabileceğinden

3	6	6
↓	↓	↓
$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

200 ile 500 arasında bulunan $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ tane doğal sayı yazılabilir.

ç) Sorunun çözümü 240 ile 300 ve 300 ile 600 arasındaki tek doğal sayıların kaç tane olduğu bulunarak yapılır.

1	3	3
↓	↓	↓
$\{2\}$	$\{4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$

A kümesinin elemanlarıyla 240 ile 300 arasında yazılabilecek tek doğal sayıların sayısı $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ olur.

3	6	3
↓	↓	↓
$\{3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$

A kümesinin elemanlarıyla 300 ile 600 arasında yazılabilecek tek doğal sayıların sayısı $3 \cdot 6 \cdot 3 = 54$ olur.
240 ile 300 sayıları arasındaki tek sayılar kümesi ve 300 ile 600 sayıları arasındaki tek sayılar kümesi ayrık kümeler olduğundan 240 ile 600 arasındaki tek sayılar, toplama yoluyla sayma metodu kullanılarak $9 + 54 = 63$ tane bulunur.



Örnek 9

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor.

a) A kümesinin elemanları kullanılarak rakamları birbirinden farklı 4 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

b) A kümesinin elemanları kullanılarak rakamları birbirinden farklı 4 basamaklı kaç farklı **çift** doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

a) [4] [4] [3] [2]

$\{1, 2, 3, 4\}$

0 rakamı binler basamağına gelemeyeceğinden yazılabilecek 4 basamaklı doğal sayıların binler basamağına 4 farklı rakam; yüzler basamağına 0 gelebileceğinden ve binler basamağında kullanılan rakam yüzler basamağında kullanılamayacağından yüzler basamağına 4 farklı rakam; yazılabilecek sayıların rakamları farklı olacağından ve binler ile yüzler basamağında kullanılan rakamlar onlar basamağında kullanılamayacağından onlar basamağına 3 farklı rakam; binler, yüzler ile onlar basamağında kullanılan rakamlar birler basamağında kullanılamayacağından birler basamağına 2 farklı rakam yazılabilir. Buradan $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ farklı doğal sayı yazılabilir.

b) 0 rakamı birler basamağına geldiğinde binler basamağına 4 farklı rakam, birler basamağına 0 ın dışında bir çift rakam geldiğinde ise binler basamağına 0 gelemeyeceğinden 3 farklı rakam gelebilir. Buna göre 0 rakamı iki farklı basamağı ilgilendirdiğinden bu durum iki farklı şekilde incelenir.

1. durum: Birler basamağı 0 olan 4 basamaklı doğal sayıların sayısı,

[4] [3] [2] [1]

$\{1, 2, 3, 4\}$ $\{0\}$

2. durum: Birler basamağı 0 hariç herhangi bir çift rakam olan 4 basamaklı doğal sayıların sayısı,

[3] [3] [2] [2]

~~$\{0\}$~~ 0 gelebilir. $\{2, 4\}$

Birinci ve ikinci duruma göre cevap $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24 + 36 = 60$ olarak bulunur.

Faktöriyel



Bilgi

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına **n faktöriyel** (çarpansal) denir ve $n!$ ile gösterilir. Buna göre

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ olur.
- $0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak kabul edilir.



Örnek 10

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a) $5!$ **b)** $7!$ **c)** $\frac{10!}{8!}$ **ç)** $7! - 5!$



Çözüm

Aşağıdaki çalışmaları inceleyiniz.

a) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ olur (Çarpmanın değişme özelliği olduğundan $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ olarak da hesaplanabilir.).

b) $7! = 7 \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6!} = 7 \cdot 6!$ olur.

c) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$ olur.

ç) $7! - 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5! - 5! = 5! \cdot (7 \cdot 6 - 1) = 5! \cdot 41$ olur.



Örnek 11

$\frac{8! - 7!}{7! + 6!}$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$8!$ ve $7!$ sayıları $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6!$ ve $7! = 7 \cdot 6!$ olarak yazılırsa

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6! - 7 \cdot 6!}{7 \cdot 6! + 6!} = \frac{\cancel{6!} \cdot (8 \cdot 7 - 7)}{\cancel{6!} \cdot (7 + 1)} = \frac{56 - 7}{8} = \frac{49}{8}$ olur.



Örnek 12

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{(n+4)! - (n+3)!}{(n+3)! + (n+2)!} = \frac{64}{n+4}$ denklemini sağlayan n değerini bulunuz.



Çözüm

$\frac{(n+4)! - (n+3)!}{(n+3)! + (n+2)!} = \frac{64}{n+4} \Rightarrow \frac{(n+4) \cdot (n+3)! - (n+3)!}{(n+3) \cdot (n+2)! + (n+2)!} = \frac{64}{n+4}$

$\Rightarrow \frac{(n+3)! \cdot (n+4-1)}{(n+2)! \cdot (n+3+1)} = \frac{64}{n+4} \Rightarrow \frac{(n+3) \cdot \cancel{(n+2)!} \cdot (n+3)}{\cancel{(n+2)!} \cdot (n+4)} = \frac{64}{n+4}$

$\frac{(n+3)^2}{n+4} = \frac{64}{n+4} \Rightarrow (n+3)^2 = 64 \Rightarrow n + 3 = 8$ olup $n = 5$ olur.



Örnek 13

5 kişinin 5 sandalyeye kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.



Çözüm

1. sandalyeye 5 kişiden herhangi biri 5 değişik şekilde,
2. sandalyeye kalan 4 kişiden biri 4 farklı şekilde,
3. sandalyeye kalan 3 kişiden biri 3 farklı şekilde,
4. sandalyeye kalan 2 kişiden biri 2 farklı şekilde,
5. sandalyeye kalan 1 kişi 1 farklı şekilde oturur.

5 farklı sandalyeye oturuşlarının sayısı, saymanın temel ilkesi kullanılarak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bulunur. 1 den 5 e kadar olan ardışık doğal sayıların çarpımının $5!$ olduğuna dikkat ediniz.



İpucu

Birbirinden farklı n tane nesne yan yana $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ farklı şekilde sıralanabilir.



Örnek 14

Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan 6 kişilik bir aile yan yana sıralanarak fotoğraf çektirecektir.

a) Aile bireylerinin kaç farklı biçimde sıralanabileceğini bulunuz.

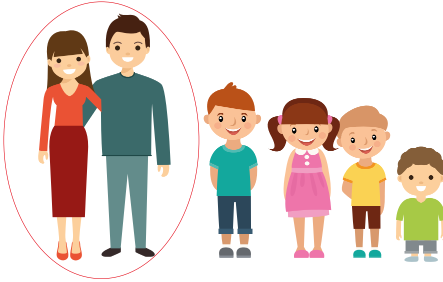
b) Anne ve baba bir arada olmak üzere aile bireylerinin kaç farklı biçimde sıralanabileceğini bulunuz.



Çözüm

a) 6 kişilik bu aile herhangi bir koşul olmadan yan yana $6!$ farklı biçimde sıralanabilir.

b)



Anne ve baba birbirinden ayrılmayacağına göre çocuklarla yer değişimi yapılırken anne ve baba 1 kişi gibi düşünülür. Dolayısıyla ailedeki kişi sayısı $1 + 4 = 5$ olarak alınırsa yan yana $5!$ sayıda sıralanırlar. Elde edilecek her sıralamada anne ve baba birbiriyle $2!$ kadar yer değiştirebileceğinden tüm sıralama sayısı $5! \cdot 2! = 120 \cdot 2 = 240$ olur.



Bilim İnsanları

Saymanın Tarihsel Gelişimi ve Sâbit İbn Kurrâ

1960'da Afrika'nın Kongo bölgesinde bulunan MÖ 18 000-20 000 yıllarına ait Isango kemiğinde sayıların gösterimi bulunmuştur. Bu bilgiden yola çıkarak saymanın tarihinin insanoğlunun tarihi kadar eskiye dayandığı düşünülebilir. İnsanoğlu saymaya ürününü, hayvanını sayarak başlamış, saymak için de bir süre sonra semboller ve sistemler geliştirmiştir. Başlangıçtaki parmakla sayma daha sonra yerini çakıl taşı ile saymaya bırakmıştır. Yüz adet çakılı saymak otlarken etrafa yayılan yüz koyunu saymaktan çok daha kolay olduğundan Mısırlılar, Yunanlılar ve Çinliler günlük hesaplama işlemlerini farklı büyüklükte çakıl taşları kullanarak yapmışlardır. Bu nedenle Latincede “hesaplama” anlamını kazanan, geçmişte ve günümüzde üniversitelerde okutulan bir ders olan kalkülüs adı “çakıl taşı” kelimesinden kaynaklanmaktadır. İlk abaküsler de aslında çakıl taşlarının birler, onlar, yüzler şeklinde yerleştirildiği basit sayma düzenekleriydi.

Günümüzden yaklaşık 4000 yıl önce bugünkü Anadolu, Suriye, Ürdün ve Irak bölgesinde önemli medeniyet kurmuş olan Sümerler ile Babil Krallığında günlük hayatta saymak için basamak değerli bir sistem kullanılmıştır. Bu sistem 60 tabanlı bir sistemdir. 60 tabanlı sistemin bir kalıntısı olarak günümüzde saat sisteminde bir saatin 60 dakika bir dakikanın 60 saniye oluşu gösterilebilir. Bir insan için nasıl sayılar diyarında gezme işi küçük yaşlarda başlayıp sonradan gelişiyorsa insanoğlu için de sayma sistemi Hint rakamları, Arap rakamları kullanılarak çok eski dönemlerden günümüze değişerek, gelişerek gelmiştir. Sayılar sisteminin başlangıcının 1 olduğu ve saymaya onunla başlandığı küçük yaşlarda öğrenilir ama bir sepette kaç elma olduğunu saymak sonraki yaşlarda öğrenilir.
Hiçliği gösteren bir simgenin kullanılmaya başlaması binlerce yıl öncesine dayanır. Babillilerden etkilenen gökbilimci Klaudios Ptolemaıos (Kladyus Batlamyus), kendi sayı sisteminde modern 0 a (sıfır) benzer bir simgeyi yer belirteci olarak kullanmıştır. Bu sayede 75 ve 705 sayılarını ayırt etmek mümkün olmuştur.

7. yy.'da Hintli matematikçi Brahmagupta sıfırı yer belirteci olmanın ötesinde bir sayı olarak kabul etmiş ve sıfırla yapılacak işlemlerle ilgili kuralları belirlemeye çalışmıştır. Sıfıra bu şekilde yaklaşan Hint, Arap sayı sisteminin Batı'ya ulaşması için 1202'de Pisalı Leonardo Fibonacci'nin "Liber Abaci (Sayı Sayma Kitabı)" adlı eserine kadar beklenmesi gerekmiştir. Kuzey Afrika'da büyüyen ve Hint – Arap aritmetiği üzerine eğitim alan Fibonacci sıfır sayısı ile Hint simgeleri olan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9'un birleşiminden oluşan sayı sisteminin gücünü fark etmekte gecikmemiştir. Böylece Fibonacci Hint- Arap sayılarını ve sıfırı yaklaşık 550 yıl sonra Batı'ya taşıyan ve burada ilk kullanan kişi olmuştur.

Saymaya başladık ama saymanın bir sonu var mıdır? Kaça kadar sayacaktık? Sonsuzluk ne kadar büyüktür? Bu geleneksel sonsuzluk anlayışına göre sayılar sonsuza dek uzayıp gider. Alman matematikçi Georg Cantor (Georg Kantor) (1845-1918) bizi çok daha farklı bir sonsuzlukla tanıştırmıştır. Dahası bunu yaparken matematiğin büyük bir kısmına yön veren bir kuram oluşturmuştur. Cantor'un kuramının dayandığı fikir ilkel bir sayma yönteminden geliyordu. Saymayı bilmeyen bir çiftçi sabah koyunlarını ağıldan çıkarırken saymak için çakıl taşı kullanarak her koyun için torbaya bir çakıl taşı atar. Akşam koyunları ağıla koyarken her koyun için torbadan bir taş çıkardığında koyunlardan biri kaybolmuş ise son bir taş artacaktır. Çiftçi saymayı bilmese de yöntem tamamen matematikseldir. Böylece çiftçi taşlar ile koyunlar arasında bire bir eşleme yapmıştır. Cantor'un kuramı kümeler üzerine kuruludur. Sonsuz sayıda elemanla uğraşırken eşitlik kavramı belirsizleşir. Bu durumda bire bir eşleme fikrine dönmek gerekir.


Sâbit İbn Kurrâ'nın temsilî resmi

Saymanın tarihsel gelişiminde rol alan diğer bir kişi de Sâbit İbn Kurrâ dır. Sâbit İbn Kurrâ, 836'da Harran'da doğmuştur. İslam matematiğinin oluşum dönemine katkıda bulunmuş matematikçilerin başında gelir. Sadece matematik, astronomi, tıp ve felsefede değil aynı zamanda Arapça ve Yunancada da kabiliyeti olan bir bilim insanıdır. Bu alanlarda 150'ye yakın eseri bulunmaktadır. Archimedes (Arşimet), Apollonius (Apollon), Euclid (Öklid), Potolemy Theodosius'un (Teodosyus) eserlerini Yunancadan Arapçaya kusursuz biçimde aktarmıştır. Öyle ki bu eserleri çevirirken terimlere bulduğu karşılıklar kabul görmüş, sonraki matematikçiler tarafından da kullanılmıştır. Çevirdiği bu eserlerin bir bölümünün asıllarının kayıp oluşu Sâbit İbn Kurrâ'nın çevirilerinin önemini daha da artırmıştır. Matematiğin aritmetik, cebir, geometri, koni kesitleri ve trigonometri alanlarında önemli eserler veren İbn Kurrâ'nın bağdaşık sayılar üzerine yaptığı inceleme Arap topraklarında yazılmış ilk orijinal eser örneği olarak kabul edilmektedir. Bu eserden Kurrâ'nın Pisagor teoremini bildiği anlaşılmaktadır. Bir açıyı üç eşit parçaya bölmüştür. Sâbit İbn Kurrâ bağdaşık sayılar hakkında aşağıdaki formülü bulmuş olmanın yanı sıra sihirli karelerden Çin dışında ilk söz eden bilim adamıdır. İbn Kurrâ'nın özellikle sayı kavramını pozitif gerçek sayıları içerecek biçimde genişletmesi, integral kalkülüs, küresel trigonometrinin bazı teoremleri, analitik geometri ve Öklidci olmayan geometri konularındaki çalışmaları kalıcı izler bırakmış, tercümelerle Avrupa'ya ulaşan görüşleri Fermat (Ferma) ve Descartes (Dekart) üzerinde etkili olmuştur. a ve b iki tam sayı olmak üzere a nın tüm bölenlerinin toplamı b; b nin tüm bölenlerinin toplamı a ise a ve b ye bağdaşık sayılar denir. İbn Kurrâ'nın bağdaşık sayılarla ilgili formülü şu şekildedir:

n bir tam sayı olmak üzere

$p = 3 \cdot 2^n - 1,\ q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ve $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ şeklinde p, q, r üç asal sayı olsun. Bu durumda

$a = 2^n pq$ ve $b = 2^n r$ iki bağdaşık sayıdır.

$n = 2$ ise $p = 11,\ q = 5,\ r = 71$ olup $a = 220$ ve $b = 284$ bağdaşık sayılardır.

$a = 220$ nin bölenleri 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110 dur.

$b = 284$ ün bölenleri 1, 2, 4, 71 ve 142 dir.

a nın bölenleri toplamı $b = 284$, b nin bölenleri toplamı $a = 220$ olur **(Cajori, 2014, s. 126-127; Zeki, 2004, s. 74-76; www-history.msc.st-and.ac.uk).**

Düzenlenmiştir.



ALIŞTIRMALAR

1. Rakamlarının çarpımı 12 olan üç basamaklı, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

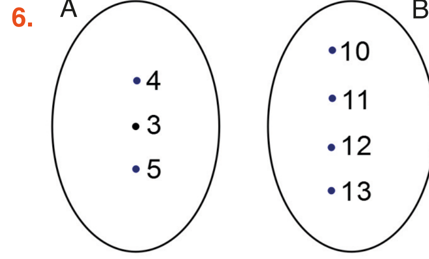
2. a, b ve c birbirinden farklı birer rakam olmak üzere $a + b + c = 6$ eşitliğini sağlayan üç basamaklı kaç tane abc sayısı olduğunu bulunuz.

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak 200 ile 340 arasında kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

4. 5 karakterli bir şifrede Türk alfabesindeki 29 harf, 10 rakam ve $A = \{@, \%, x, \#, \varnothing, ?\}$ kümesindeki elemanlar kullanılabilmektedir. Ancak bu şifrede art arda gelen iki karakterin birbirinden farklı olma zorunluluğu vardır. Bu şifreyi bilmeyen birisinin deneme yanılma yoluyla şifreyi kesinlikle bulabilmesi için **en az** kaç deneme yapması gerektiğini bulunuz.

5. 5892 sayısının rakamları yer değiştirilerek yazılabilecek 4 basamaklı doğal sayıların toplamı $6666 \cdot (a!)$ olduğuna göre a doğal sayısını bulunuz.

6.



Venn şeması ile verilen A ve B kümeleri için x, A kümesindeki herhangi bir elemanı ve y, B kümesindeki herhangi bir elemanı göstermek üzere aşağıdaki koşullara uygun (x, y) şeklinde eşlemeler yapılacaktır.

- A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmamalıdır.
- A kümesinden alınan her bir eleman B kümesinden yalnız bir elemanla eşlenecektir.

Verilen koşullara uygun yapılan eşlemelerin olduğu kümeye F adı verilirse F kümesinin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

7. Bir banka bilgisayar programıyla aşağıdaki koşullara uygun 6 haneli farklı şifreler oluşturup şifreleri müşterilerine verecektir.

- Şifre 4 farklı rakam ve 2 sesli harften oluşacaktır.
- Şifre bir tek rakam ile başlayıp yine bir tek rakam ile bitecektir.
- Şifrenin 3. ve 5. hanesi aynı sesli harften oluşacaktır.

Buna göre kaç farklı şifre oluşturulabileceğini bulunuz.

10.1.1.2. Permütasyon (Sıralama)



Bilgi

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan dizilişlerin her birine **n nin r li bir permütasyonu** denir. Permütasyon sayısı ile farklı dizilişlerin sayısı kastedilir.



Örnek 15

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin ikili permütasyonlarını yazınız.



Çözüm

A kümesinin elemanlarını ikişerli seçerek yapılabilecek tüm sıralı ikililer;
$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$ şeklindedir (Üç elemanlı bir kümenin ikili permütasyonlarının sayısı 6 dır.).



İpucu

n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ ile gösterilir ve $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ ile hesaplanır.

- $P(n, 0) = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ olur.
- $P(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ olur (n tane farklı elemanın yan yana diziliş sayısıdır.).



Örnek 16

$n \in \mathbb{N}$ ve $P(n, 1) + P(n, 2) = 36$ olduğuna göre $P(n, 0) + P(n, n)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$P(n, 1) = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$ ve

$P(n, 2) = \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n \cdot (n-1) = n^2 - n$ olur. Buradan

$P(n, 1) + P(n, 2) = 36$

$n + n^2 - n = 36$

$n^2 = 36$

$n = 6$ bulunur. Bu değer $P(n, 0) + P(n, n)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$P(6, 0) + P(6, 6) = 1 + 6! = 1 + 720 = 721$



Örnek 17

5 kişiden üçünün 3 kişilik bir sıraya farklı biçimde dizilmelerinin sayısı, 4 kişiden ikisinin 2 kişilik bir sıraya farklı biçimde dizilmelerinin sayısından kaç fazladır?



Çözüm

5 kişiden üçünün 3 kişilik bir sıraya farklı biçimde dizilmelerinin sayısı, $P(5, 3)$ ile bulunur.
$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ olur. 4 kişiden ikisinin 2 kişilik bir sıraya farklı biçimde dizilmelerinin sayısı, $P(4, 2)$ ile bulunur. $P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ olur.

Buradan bulunan bu iki değerin farkı $P(5, 3) - P(4, 2) = 60 - 12 = 48$ olur.



Örnek 18

HAREZMİ kelimesinin harflerini **en çok** bir kez kullanılarak bu harflerle anlamlı ya da anlamsız 4 harfli kaç kelime yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

1. yol

Toplam 7 harften oluşan HAREZMİ kelimesinin herhangi 4 harfi ile yazılabilecek kelime sayısı,
$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$ olur.

2. yol

Verilen koşula uygun kelime sayısını hesaplamak için yan yana 4 adet kutu çizilir.

1. kutuya yazılacak harf 7 harften herhangi biri olarak 7 farklı şekilde, 2. kutuya kalan 6 harften herhangi biri 6 farklı şekilde, 3. kutuya kalan 5 harften herhangi biri 5 farklı şekilde, 4. kutuya kalan 4 harften herhangi biri 4 farklı şekilde yazılır.

7	6	5	4

Buna göre sonuç $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ olur.



Örnek 19

Elemanları iki basamaklı, birbirinden farklı, en küçük 6 tane asal sayıdan oluşan bir A kümesinin

a) Üçlü permütasyonlarından kaçında 11 sayısının olmadığını bulunuz.

b) Üçlü permütasyonlarından kaçında 11 sayısının olduğunu bulunuz.



Çözüm

a) Koşula uygun asal sayılar 11, 13, 17, 19, 23 ve 29 dur. Bu durumda A kümesi $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ olarak yazılır. 11 sayısı üçlü permütasyonların içinde olamayacağından geriye 5 eleman kalır. Böylece çözüm, $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olur.

b) 11 sayısının bulunduğu üçlü permütasyonların sayısını hesaplamak için A kümesinin tüm üçlü permütasyonlarının sayısından 11 sayısının bulunmadığı üçlü permütasyonların sayısı çıkarılır. Böylece çözüm, $P(6, 3) - P(5, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120 - 60 = 60$ olur.



Örnek 20

$5 \cdot P(8,\ 3) = 8 \cdot P(n,\ 2)$ denklemini sağlayan n pozitif tam sayısını bulunuz.



Çözüm

$5 \cdot P(8,3) = 8 \cdot P(n,2)$

$5 \cdot \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$

$5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$

$5 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = \cancel{8} \cdot n \cdot (n-1)$

$15 \cdot 14 = n \cdot (n-1)$ ve $n = 15$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
$P(n,\ 0) + P(n,\ 1) + P(n,\ 2) = 145$ olduğuna göre $P(n,\ 3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. Aralarında Ayşe ve Çınar'ın bulunduğu a kişilik bir arkadaş grubu düz bir sırada yan yana sıralanacaktır. Ayşe ve Çınar'ın arasında yalnız bir kişinin bulunduğu sıralama sayısı $16 \cdot (a-2)!$ olduğuna göre a sayısının kaç olduğunu bulunuz.

3. Aralarında Elif ve Ömer'in bulunduğu 6 kişilik bir arkadaş grubu yan yana sıralanarak fotoğraf çektirecektir. Elif ve Ömer'in arasında herhangi birinin bulunmadığı kaç farklı sıralama olduğunu bulunuz.

4. 5 farklı kırmızı, 3 farklı beyaz bilyenin başa ve sona birer kırmızı bilye gelmesi ve beyaz bilyelerin birbirinden ayrılmaması koşuluyla yan yana kaç değişik biçimde sıralanabileceğini bulunuz.

5. 54 210 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 5 basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabileceğini bulunuz.

6. $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ kümesinin üçlü permütasyonlarının kaç tanesinde **en az** bir tane sesli harf olduğunu bulunuz.

7. "KİTAP" kelimesinin harflerinin yer değiştirilmesiyle oluşturulan 5 harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerden kaçının K ile başladığını ve P ile bitmediğini bulunuz.

10.1.1.3. Tekrarlı Permütasyon



Örnek 21

ALA kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan anlamlı ya da anlamsız 3 harfli kelimeleri yazınız.



Çözüm

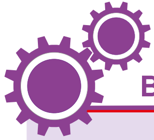
Koşula uygun kelimeler LAA, ALA ve AAL dir (Bu yazılışların her birinde A harflerinin birbiriyle yer değiştirilmesiyle farklı kelimeler yazılamayacağına dikkat ediniz.).



İpucu

$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$ olmak üzere n tane nesnenin

n_1 tanesi özdeş (aynı büyüklük ve özellikte), n_2 tanesi özdeş, ..., n_r tanesi özdeş ise bu n tane nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!}$ ile bulunur.



Buluyorum

Özdeş nesneler olmasaydı n adet nesne n adet sıraya n! adet sıralanacaktı. n adet nesne için n_1 adedi aralarında özdeş, n_2 adedi aralarında özdeş, ..., n_r adedi aralarında özdeş olsun. Bu nesnelerin kendi aralarında tekrarlanması, sonucu değiştirmediği hâlde nesneler fazladan sayılmıştır. İlk gruptaki özdeş n_1 adet nesnenin kendi aralarında yer değiştirmeleri $n_1!$, ikinci gruptaki özdeş n_2 adet nesnenin kendi aralarında yer değiştirmeleri $n_2!$, ..., özdeş n_r adet nesnenin kendi aralarında yer değiştirmeleri $n_r!$ olmaktadır. Saymanın çarpma ilkesine göre tüm bu yer değiştirmeler $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!$ adet olur. Bu yer değiştirmeler sonucu değiştirmemektedir. Özdeş nesnelerin yer değiştirmelerinin sayısı olan n! in $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!$ sayısına bölünmesi gerekmektedir.
Buradan $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_r!}$ elde edilir.



Örnek 22

KELEBEK kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 7 harfli kaç farklı kelime yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

KELEBEK kelimesinin harfleri içinde 2 tane K, 3 tane E, 1 tane L ve 1 tane B harfi vardır. Tekrarlı permütasyonların sayısını veren formül kullanılarak yazılabilecek 7 harfli kelimelerin sayısı,
$\dfrac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \dfrac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$ olur.



Örnek 23

Özdeş 5 mavi, özdeş 3 kırmızı ve özdeş 2 beyaz bilyenin yan yana kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.



Çözüm

Toplam $5+3+2=10$ bilyeden özdeş 5 mavi, özdeş 3 kırmızı ve özdeş 2 beyaz bilye olduğundan bu bilyelerin tekrarlı permütasyonlarının sayısını veren formül kullanılarak yan yana sıralanmalarının sayısı, $\frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!}=2520$ olur.



Örnek 24

ELEK kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 3 harfli kaç farklı kelime yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

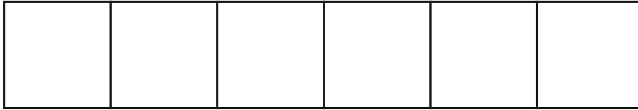
ELEK kelimesinden elde edilebilecek 3 harfli anlamlı ya da anlamsız kelime sayısı üç farklı durumda incelenir.

- E harflerinden biri kullanılmazsa kalan L, E, K harfleriyle $3!=6$,
- L harfi kullanılmazsa kalan E, E, K harfleriyle $\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{6}{2}=3$,
- K harfi kullanılmazsa kalan E, L, E harfleriyle $\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{6}{2}=3$ farklı şekilde kelime yazılır.

Buradan yazılabilecek toplam kelime sayısı, $6+3+3=12$ olur.



Örnek 25

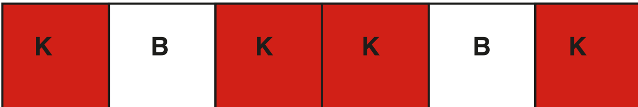


Yukarıdaki şekilde verilen her biri 1 birimkare olan 6 adet kare biçimindeki beyaz şeklin herhangi dördünün kırmızı renge kaç farklı biçimde boyanabileceğini bulunuz.



Çözüm

Karelerden herhangi dördünün kırmızıya boyandığı durumlardan biri aşağıdaki gibidir.



Kırmızıya boyanan bölgeleri K, beyaz bölgeleri B ile gösterecek olursak KBKKBK ifadesinin tekrarlı permütasyonlarının sayısı kadar boyama gerçekleşir. Tekrarlı permütasyonların sayısını veren formül kullanılarak çözüm $\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ olur.



Örnek 26

22 005 sayısı veriliyor.

a) Verilen sayının rakamları yer değiştirilerek 5 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

b) Verilen sayının rakamları yer değiştirilerek 5 basamaklı kaç farklı çift doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

a) 22 005 sayısını oluşturan 5 rakam $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{120}{4}=30$ farklı şekilde yer değiştirir. Bu 30 sayıdan 0 ile başlayan $\frac{4!}{2!\cdot 1!}=12$ tane sayı olduğundan 5 basamaklı $30-12=18$ tane sayı yazılabilir.

b) Elde edilecek 5 basamaklı çift sayılar, 0 ile bitenler ve 2 ile bitenler olarak iki grupta incelenir.

0 ile bitenler, örneğin $22\ 05\underbrace{0}_{\text{sabit}}$ sayısı için bu sayının birler basamağındaki 0 rakamı hariç rakamları yer değiştirilerek $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{24}{2}=12$ farklı sayı elde edilebilir. Sayının on binler basamağına 0 gelen durum sayısı,

1	3	2	1	1
{0}				{0}

$\frac{3!}{2!}=3$ olur.

2 ile bitenler, örneğin $20\ 05\underbrace{2}_{\text{sabit}}$ sayısı için bu sayının birler basamağındaki 2 rakamı hariç rakamları yer değiştirilerek $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{24}{2}=12$ farklı sayı elde edilebilir. Sayının on binler basamağına 0 gelen durum sayısı,

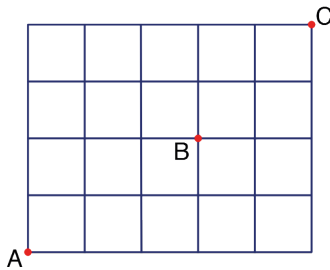
1	3	2	1	1
{0}				{2}

$3!=6$ olur.

Bu durumda yazılabilecek 5 basamaklı çift sayıların sayısı tüm durumlar toplamından on binler basamağının 0 olduğu durumlar çıkarılarak $12+12-3-6=15$ olur.



Örnek 27

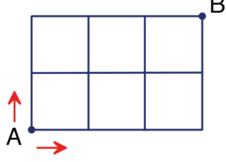


Yukarıdaki şekilde verilen çizgiler bir mahallenin birbirini dik kesen sokaklarını temsil etmektedir. A köşesindeki evinden yola çıkan Merve'nin anneannesine ekmek almak için B köşesindeki markete uğramak koşuluyla en kısa yollardan kaç farklı biçimde C köşesindeki anneannesinin evine ulaşabileceğini bulunuz.



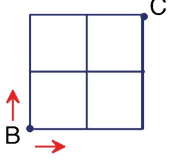
Çözüm

Merve'nin önce A ile B arasında kullanacağı yol sayısı bulunur.



A ile B arasını en kısa yollardan gidecek olan Merve'nin 3 sokak sağa (S) ve 2 sokak yukarı (Y) yürümesi gerekir. SYSSY, SSYSY bu duruma uygun yollardan ikisidir. Buna göre Merve A dan B ye $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{120}{12}=10$ farklı şekilde ulaşır.

Merve'nin B ile C arasında kullanacağı yol sayısı ise



2 sokak sağa ve 2 sokak yukarı olacak şekilde $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{24}{4}=6$ farklı şekildedir.

Saymanın temel ilkesine göre Merve, A dan C ye $10\cdot 6=60$ farklı şekilde ulaşır.



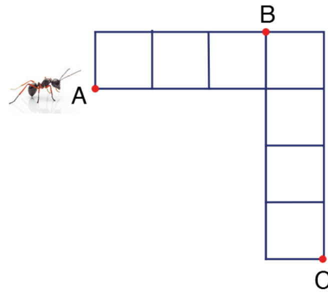
ALIŞTIRMALAR

1. 4 özdeş sarı, 3 özdeş turuncu ve 2 özdeş mavi top yan yana sıralanacaktır. Aynı renkteki topların yan yana bulunduğu kaç farklı sıralama olduğunu bulunuz.

2. 366 300 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 6 basamaklı kaç tek sayı yazılabileceğini bulunuz.

3. Bir hakem, yönettiği futbol maçında oyunculara toplam 5 tane sarı veya kırmızı kart göstermiştir. Bu maçta gösterdiği sarı kart sayısı kırmızı kart sayısından fazladır ve birden fazla kart gören oyuncu yoktur. Buna göre hakemin kart gösterme işlemini toplam kaç farklı şekilde gerçekleştirebileceğini bulunuz.

4.



Şekilde eş karelerden oluşan telin A noktasından hareket eden bir karıncanın B noktasına uğramak koşuluyla en kısa yollardan giderek C noktasına kaç farklı şekilde gidebileceğini bulunuz.

5. Esra'nın aynı özellikte 3 ü mavi, 4 ü siyah ve 2 si kırmızı olmak üzere toplam 9 kalemi vardır. Esra'nın kalemlerini başa ve sona birer kırmızı kalem getirmesi ve mavi kalemleri birbirinden **ayırmaması** koşuluyla yan yana kaç farklı biçimde sıralayabileceğini bulunuz.

10.1.1.4. Kombinasyon (Seçim)

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin 2 elemanlı dizilişleri ve 2 elemanlı alt kümeleri aşağıdaki gibi düzenlenirse 2 elemanlı dizilişleri “ab, ba, ac, ca, bc, cb ” dir. 2 elemanlı alt kümeleri ise “$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$” şeklindedir. Nesnelerin dizilişi **permütasyon** ile r elemanlı alt kümelerinin (gruplamalarının) her biri **kombinasyon** ile ifade edilir.



Bilgi

A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine **A kümesinin r li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı (kısaca r li) kombinasyonlarının sayısı C(n, r) ya da $\binom{n}{r}$ ile gösterilir. $C(n, r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ olur.

Kombinasyon sayısı ile farklı gruplamaların sayısı kastedilir.

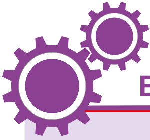
Kombinasyon sayısının hesaplanmasında kümenin elemanlarının sıralama sayısı değil bu elemanların seçilebilme sayısı önemlidir.



İpucu

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı permütasyonlarının sayısı ile r elemanlı kombinasyonlarının sayısı arasında $P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$ eşitliği vardır.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n, r) \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!}$$

$$P(n, r) \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$P(n, r) \cdot \frac{1}{r!} = C(n, r)$$

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$$



Örnek 28

$A = \{a, b, c, d, 1, 2\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.



Çözüm

$s(A) = 6$ olup 2 elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 15 \text{ olur.}$$



Örnek 29

$\binom{5}{3}+\binom{6}{2}+\binom{7}{4}$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$\binom{5}{3}=\dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{3!}}=10$ olur.

$\binom{6}{2}=\dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=15$ olur.

$\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!\cdot(7-4)!}=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=35$ olur.

Buradan
$\binom{5}{3}+\binom{6}{2}+\binom{7}{4}=10+15+35=60$ olur.



Örnek 30

Sosyal sorumluluk projesi kapsamında 10-A sınıfının sınıf öğretmeni Elif Hanım'ın huzurevine yapacakları ziyaret için sınıfında bulunan 20 öğrenciden 3 ünü kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.



Çözüm

Sınıftaki 20 kişiden 3 kişi $\binom{20}{3}$ farklı biçimde seçilebilir. Bu durumda
$\binom{20}{3}=\dfrac{20!}{3!\cdot(20-3)!}=\dfrac{20!}{3!\cdot 17!}=\dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \cancel{17!}}{3!\cdot \cancel{17!}}=1140$ bulunur.



İpucu

n elemanlı bir kümenin 0 elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$ $(n\in\mathbb{N})$

n elemanlı bir kümenin n elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!\cdot 1}=1$ $(n\in\mathbb{N})$

n elemanlı bir kümenin 1 elemanlı alt küme sayısı, $\binom{n}{1}=\dfrac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\dfrac{n\cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$ $(n\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 1)$



Örnek 31

$\binom{16}{0}+\binom{16}{1}+\binom{16}{16}$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$\binom{16}{0}+\binom{16}{1}+\binom{16}{16}=1+16+1=18$ olur.



Örnek 32

n elemanlı bir kümenin 0, 1 ve n elemanlı alt küme sayıları toplamı $18-n$ olduğuna göre n nin değerini bulunuz.



Çözüm

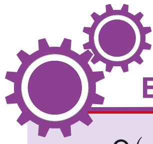
$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{n}=18-n \Rightarrow 1+n+1=18-n \Rightarrow n+2=18-n \Rightarrow 2n=16 \Rightarrow n=8$ olur.



İpucu

$n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere $C(n, r)=C(n, n-r)$ eşitliği vardır.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

$$\left.\begin{aligned}
C(n, r) &= \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\\
C(n, r) &= \frac{n!}{(n-n+r)!\cdot(n-r)!}\\
C(n, r) &= \frac{n!}{(n-(n-r))!\cdot(n-r)!}\\
C(n, r) &= \frac{n!}{(n-r)!\cdot(n-(n-r))!}\\
C(n, r) &= C(n, n-r)
\end{aligned}\right\}$$

Sonuç olarak n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri ile $n-r$ elemanlı alt kümeleri eşit sayıdadır.



Örnek 33

$C(20, 19)+C(20, 18)$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$C(20, 19)=C(20, 1)$ ve $C(20, 18)=C(20, 2)$ olduğundan

$C(20, 19)+C(20, 18)=C(20, 1)+C(20, 2)=20+\frac{20!}{2!\cdot 18!}=20+\frac{20\cdot 19\cdot \cancel{18!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{18!}}=20+190=210$ olur.



Örnek 34

$\binom{n+4}{n+3}+\binom{n+2}{n+1}=16$ olduğuna göre n değerini bulunuz.



Çözüm

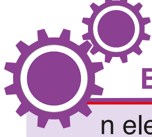
$$\left.\begin{aligned}
\binom{n+4}{n+3}&=\binom{n+4}{n+4-(n+3)}=\binom{n+4}{1}=n+4\\
\binom{n+2}{n+1}&=\binom{n+2}{n+2-(n+1)}=\binom{n+2}{1}=n+2
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}
\binom{n+4}{n+3}+\binom{n+2}{n+1}&=16\\
(n+4)+(n+2)&=16\\
2n+6&=16\\
n&=5 \text{ olur.}
\end{aligned}\right.$$



İpucu

n, bir kümenin eleman sayısı olmak üzere $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

n elemanlı bir kümenin

0 elemanlı alt küme sayısı: $\binom{n}{0}$

1 elemanlı alt küme sayısı: $\binom{n}{1}$

2 elemanlı alt küme sayısı: $\binom{n}{2}$

⋮

n elemanlı alt küme sayısı: $\binom{n}{n}$

Buradan n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}$ bulunur.

Bu değer aynı zamanda 2^n sayısına eşittir.

Dolayısıyla $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$ olur.



Örnek 35

$A=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+...+\binom{7}{7}$ olduğuna göre A ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\underbrace{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+...+\binom{7}{7}}_{A}=2^7 \Rightarrow 1+7+A=128 \Rightarrow A=120 \text{ olur.}$$



Örnek 36

3 elemanlı alt küme sayısı, 5 elemanlı alt küme sayısına eşit olan bir kümenin **en çok** 2 elemanlı alt küme sayısını bulunuz.



Çözüm

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{5} \Rightarrow n=3+5 \Rightarrow n=8 \text{ ve } \binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}=1+8+\frac{8!}{2!\cdot 6!}=9+28=37 \text{ olur.}$$



Örnek 37

8 erkek, 6 kadın arasından 2 si kadın, 3 ü erkek 5 kişilik bir grubun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.



Çözüm

Bu seçim yapılırken gruptaki 5 kişinin 2 si kadın olacağından 6 kadın arasından 2 kadın, $\binom{6}{2}$ sayısı kadar farklı şekilde; 5 kişinin 3 ü erkek olacağından 8 erkek arasından 3 erkek, $\binom{8}{3}$ sayısı kadar farklı şekilde seçilebilir. Bu durumda 8 erkek, 6 kadın arasından 2 si kadın, 3 ü erkek olan 5 kişilik grup sayısı saymanın temel ilkesi (çarpma yoluyla sayma) gereği

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{3}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=15\cdot 56=840 \text{ olur.}$$



Örnek 38

$A=\{a, b, c, d, 1, x, \%, m\}$ kümesi veriliyor.

a) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a elemanının bulunduğunu hesaplayınız.

b) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında b elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

c) A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında a elemanının bulunup b elemanının bulunmadığını hesaplayınız.



Çözüm

a) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanlarından biri a olacağından diğer 2 si,

$B=\{b, c, d, 1, x, \%, m\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(B)=7$ olduğundan bu 7 elemandan 2 si, $\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=21$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla A kümesinin a elemanını içeren 3 elemanlı alt kümelerin sayısı 21 dir.

b) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanları arasında b bulunmayacağından 3 ü,

$C=\{a, c, d, 1, x, \%, m\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(C)=7$ olduğundan bu 7 elemandan 3 ü, $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=35$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla A kümesinin b elemanını içermeyen 3 elemanlı alt kümelerin sayısı 35 tir.

c) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerin elemanları arasında a bulunup b bulunmayacağından diğer 2 si, $D=\{c, d, 1, x, \%, m\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(D)=6$ olduğundan bu 6 elemandan 2 si, $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=15$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla A kümesinin a elemanını içeren ve b elemanını içermeyen 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 15 tir.



Örnek 39

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi veriliyor.

a) A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 4 ve 5 elemanlarının bulunduğunu hesaplayınız.

b) A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 3 veya 6 elemanının bulunduğunu hesaplayınız.



Çözüm

a) Oluşturulabilecek 4 elemanlı alt kümelerin elemanlarından 2 si 4 ve 5 olacağından diğer 2 si, $B=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ kümesinin elemanlarından seçilmelidir. $s(B)=6$ olduğundan bu 6 elemandan 2 si, $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=15$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla A kümesinin 4 ve 5 elemanlarını içeren 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı 15 tir.

b) A kümesinin 3 ve 6 elemanlarının dışında kalan elemanların oluşturduğu 4 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulup bu sonuç, A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısından çıkarılırsa

$\binom{8}{4}-\binom{6}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}-\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}-\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=70-15=55$ elde edilir. Dolayısıyla A kümesinin 3 veya 6 elemanlarını içeren 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı 55 tir.



Örnek 40

6 matematik, 4 fizik öğretmeni arasından **en fazla** 2 fizik öğretmeninin bulunduğu 4 kişilik bir komisyonun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.



Çözüm

4 kişilik komisyonda en fazla 2 fizik öğretmeni bulunması; bu komisyonda 2 fizik öğretmeninin bulunması,1 fizik öğretmeninin bulunması ya da hiçbir fizik öğretmeninin bulunmaması durumunda olabilir. Bu üç durum aşağıdaki gibi incelenir.

- 2 si fizik öğretmeni ise diğer 2 si matematik öğretmeni olmalıdır.
  Bu seçim, $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{2!}}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=6\cdot 15=90$ farklı şekildedir.

- 1 i fizik öğretmeni ise diğer 3 ü matematik öğretmeni olmalıdır.
  Bu seçim, $\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{3}=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{4\cdot \cancel{3!}}{1\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{3!}}=4\cdot 20=80$ farklı şekildedir.

- Fizik öğretmeni yoksa 4 ü de matematik öğretmeni olmalıdır.
  Bu seçim, $\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{4}=\frac{\cancel{4!}}{0!\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}=1\cdot\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=1\cdot 15=15$ farklı şekildedir.

Buradan 6 matematik, 4 fizik öğretmeninin olduğu bir okulda en fazla 2 fizik öğretmeninin olduğu 4 kişilik bir komisyon $90+80+15=185$ farklı şekilde seçilebilir.



Örnek 41

Bir okulda 10 seçmeli dersten 4 ü aynı gün ve saatte verilmektedir. Bu 10 seçmeli dersten 5 ini seçmek isteyen Elif'in seçtiği tüm derslere girebilmesi şartıyla kaç farklı şekilde ders seçimi yapabileceğini bulunuz.



Çözüm

Elif, seçmeli derslerden 4 ü aynı gün ve saatte verildiğinden bu 4 dersten sadece 1 ini seçebilir ya da bu 4 dersten hiçbirini seçemez. Buradan

- Aynı gün ve saatte verilen 4 dersten 1 ini ve kalan $10-4=6$ dersten $5-1=4$ ünü

  $\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{4}=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{4\cdot \cancel{3!}}{1\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=4\cdot 15=60$ farklı şekilde seçer.

- Aynı gün ve saatte verilen 4 dersten hiçbirini seçmediğinde kalan 6 dersten 5 ini

  $\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{5}=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot\frac{6!}{5!\cdot 1!}=\frac{\cancel{4!}}{1\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{6\cdot \cancel{5!}}{1\cdot \cancel{5!}}=1\cdot 6=6$ farklı şekilde seçer.

Bu durumda Elif, toplamda bu 5 dersi $\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{4}+\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{5}=60+6=66$ farklı şekilde seçebilir.



Örnek 42



6 doktor, 9 hemşirenin bulunduğu bir hastaneden içinde **en az** bir doktor bulunan 3 kişilik bir sağlık ekibinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.



Çözüm

1. yol

3 kişilik sağlık ekibinde en az bir doktor bulunacağına göre bu sağlık ekibinde 1, 2 ya da 3 doktor bulunabilir. Bu üç durum aşağıdaki gibi incelenirse

- 1 i doktor ise diğer 2 si hemşire olmalıdır.

  Bu seçim, 6 doktor arasından 1 doktor $\binom{6}{1}$ farklı biçimde seçilir. 9 hemşire içinden 2 hemşire $\binom{9}{2}$ farklı biçimde seçilir. Böylece 1 doktor ve 2 hemşireden oluşan sağlık ekibi,

  $\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{2}=\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{6\cdot \cancel{5!}}{1\cdot \cancel{5!}}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{7!}}=6\cdot 36=216$ farklı biçimde oluşturulur.

- 2 si doktor ise diğeri hemşire olmalıdır.

  Bu seçim, 6 doktor arasından 2 doktor $\binom{6}{2}$ farklı biçimde seçilir. 9 hemşire içinden 1 hemşire $\binom{9}{1}$ farklı biçimde seçilir. Böylece 2 doktor ve 1 hemşireden oluşan sağlık ekibi,

  $\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{1}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{9!}{1!\cdot 8!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{9\cdot \cancel{8!}}{1\cdot \cancel{8!}}=15\cdot 9=135$ farklı biçimde oluşturulur.

- 3 ü doktor ise hiç hemşire bulunmamalıdır.

  Bu seçim, 6 doktor arasından 3 doktor $\binom{6}{3}$ farklı biçimde seçilir. Ekipte hemşire olmayacağından 9 hemşire içinden $\binom{9}{0}$ farklı biçimde seçim yapılır. Böylece 3 doktordan oluşan sağlık ekibi,

  $\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{0}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{9!}{0!\cdot 9!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{9!}}{1\cdot \cancel{9!}}=20\cdot 1=20$ farklı biçimde oluşturulur.

Buradan 6 doktor, 9 hemşirenin bulunduğu bir hastaneden en az biri doktor olan 3 kişilik bir sağlık ekibi,

$\binom{6}{1}\cdot\binom{9}{2}+\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{1}+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{0}=216+135+20=371$ farklı biçimde oluşturulur.

2. yol

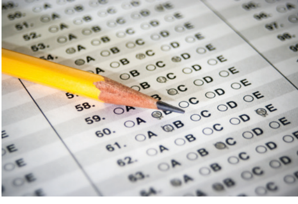
15 kişinin bulunduğu bu gruptan oluşturulabilecek 3 kişilik grupların sayısından herhangi bir doktorun bulunmadığı 3 kişilik grupların sayısı çıkarılarak çözüme ulaşılabilir.

Dolayısıyla 6 doktor, 9 hemşirenin bulunduğu bir hastaneden en az biri doktor olan 3 kişilik bir sağlık ekibi,

$\binom{15}{3}-\binom{9}{3}=\frac{15!}{12!\cdot 3!}-\frac{9!}{6!\cdot 3!}=455-84=371$ farklı şekilde seçilebilir.



Örnek 43



İlk 6 sorusunun cevaplanması zorunlu olan 15 soruluk bir sınava giren Taykut'un toplam 12 soruyu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.



Çözüm

Taykut'un 15 sorudan ilk 6 sını cevaplama zorunluluğu olduğundan Taykut, kalan $15-6=9$ sorudan $12-6=6$ soru seçerek toplamda 12 soru cevaplamış olacaktır. Buradan Taykut cevaplayacağı soruları,
$\binom{9}{6}=\dfrac{9!}{6!\cdot(9-6)!}=\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{6!}}=84$ farklı şekilde seçebilir.



Örnek 44



16 kişilik bir sporcu grubundan 10 kişilik bir takım oluşturulacaktır. Takıma girecek 6 kişi belli olduğuna göre bu 10 kişilik takımın kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.



Çözüm

16 kişiden 6 sı belli olduğu için kalan 10 kişi arasından 4 kişi seçilecektir.
Bu 4 kişi $\binom{10}{4}=\dfrac{10!}{4!\cdot(10-4)!}=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{6!}}=210$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla 10 kişilik takım 210 farklı şekilde oluşturulabilir.



Örnek 45



15 kişilik bir grupta 8 kişi resim kursuna, 7 kişi müzik kursuna katılmaktadır. Bu kurslardan birine katılan herhangi bir kişinin diğer kursa katılmadığı biliniyor. Buna göre 3 ü resim ve 2 si müzik kursuna katılan toplam 5 kişinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.



Çözüm

Resim kursuna katılan 8 kişi arasından 3 kişi, $\binom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=56$ farklı şekilde seçilebilir.

Müzik kursuna katılan 7 kişi arasından 2 kişi, $\binom{7}{2}=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=21$ farklı şekilde seçilebilir.

Saymanın temel ilkesine göre resim kursuna katılan 3 kişi ve müzik kursuna katılan 2 kişi $56\cdot 21=1176$ farklı şekilde seçilebilir.



Örnek 46



Bir sınıfta 9 kişi arasından 6 kişilik bir ekip ve bu ekip içinden de bir başkan seçilecektir. Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.



Çözüm

9 öğrenci arasından 6 kişilik bir ekip, $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\cdot(9-6)!} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{6!}} = 84$ farklı şekilde seçilebilir. Seçilen bu ekip içerisinden 1 başkan ise $\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!\cdot 5!} = \frac{6\cdot \cancel{5!}}{1\cdot \cancel{5!}} = 6$ farklı şekilde seçilebilir. Bu durumda 9 öğrenci arasından 6 kişilik bir ekip oluşturulup bu ekip içerisinden bir başkanın seçilmesi,

$\binom{9}{6}\cdot\binom{6}{1} = 84\cdot 6 = 504$ farklı şekilde olabilir.



Örnek 47



11 kişilik bir grupta 5 kişi yalnız satranç ve 6 kişi yalnız mangala (Türk zeka ve strateji oyunu) oynamaktadır. Bu gruptan satranç oynayan 2 kişi ve mangala oynayan 3 kişiden oluşan 5 kişilik bir grubun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.



Çözüm

Satranç oynayan 5 kişi arasından 2 kişi, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{3!}} = 10$ farklı şekilde seçilebilir.

Mangala oynayan 6 kişi arasından 3 kişi, $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{3!}} = 20$ farklı şekilde seçilebilir.

Satranç oynayan 2 kişi ve mangala oynayan 3 kişiden oluşan 5 kişilik bir grup, çarpma yoluyla sayma kuralına göre $10\cdot 20 = 200$ farklı şekilde seçilebilir.



Örnek 48

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin elemanları ile $a < b < c < d$ şartını sağlayan kaç farklı abcd dört basamaklı sayısının yazılabileceğini bulunuz.

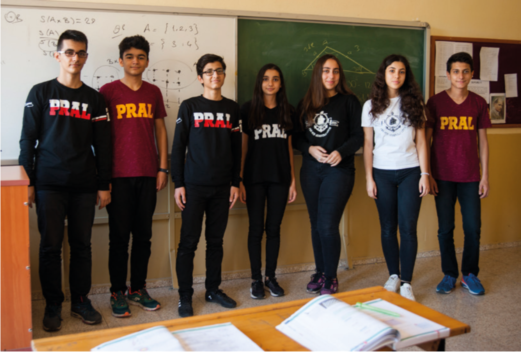


Çözüm

A kümesinden seçilen her dört rakam ile istenen şarta uygun yalnız bir sayı yazılabilir. Örneğin 2, 3, 4, 6 rakamları seçildiğinde $2 < 3 < 4 < 6$ olduğundan uygun sayı 2346 dır. Buna göre istenen koşulları sağlayan $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4!}} = 35$ farklı sayı yazılabilir.



Örnek 49



Adana Piri Reis Anadolu Lisesi, yıl sonunda dereceye giren 3 kız ve 4 erkek öğrenci arasından 2 sini İzmir'e, 3 ünü Ankara'ya geziye göndermek üzere aynı cinsiyetli öğrencilerden oluşan biri 2, diğeri 3 kişilik iki grup oluşturacaktır. Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.



Çözüm

- 3 ü kız ve 2 si erkek öğrenciden oluşan grup sayısı,

$$\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{2}=\frac{3!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{2!}}=1\cdot 6=6 \text{ olur.}$$

- 3 ü erkek ve 2 si kız öğrenciden oluşan grup sayısı,

$$\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{2}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{4\cdot \cancel{3!}}{1\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 1}=4\cdot 3=12 \text{ olur.}$$

Buna göre bu seçim $6+12=18$ farklı şekilde yapılabilir.



Örnek 50

Bir otelde 4, 3 ve 2 yataklı birer oda boştur. 9 kişinin bu odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğini bulunuz.



Çözüm

Odalardaki toplam boş yatak sayısı ile kişi sayısı eşit olduğundan kişileri odalara yerleştirmede hangi odadan başlanacağı önemli değildir.

9 kişiden 4 ü 4 yataklı odaya $\binom{9}{4}$ farklı şekilde, kalan 5 kişiden 3 ü 3 yataklı odaya $\binom{5}{3}$ farklı şekilde, kalan 2 si 2 yataklı odaya $\binom{2}{2}$ farklı şekilde yerleştirildiğinde odalara farklı biçimde yerleştirilme sayısı,

$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=\frac{9!}{5!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!}=1260 \text{ olur.}$$



Örnek 51

Ecem ve Fahrettin'in aralarında bulunduğu 10 kişilik bir gruptan 6 kişilik bir ekip oluşturulacaktır. Ecem ve Fahrettin'den yalnız birinin bulunduğu kaç farklı ekip oluşturulabileceğini bulunuz.



Çözüm

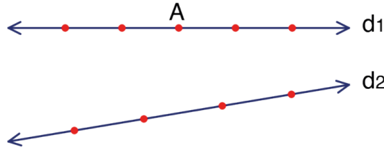
Ecem'in bulunup Fahrettin'in bulunmadığı 6 kişilik ekip sayısı, $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=56$ olur.

Fahrettin'in bulunup Ecem'in bulunmadığı 6 kişilik ekip sayısı, $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=56$ olur.

O hâlde Ecem ve Fahrettin'in birlikte bulunmadığı (yalnız birinin bulunduğu) ekip sayısı, $56+56=112$ olur.



Örnek 52



Yandaki şekilde 5 i d_1 doğrusu üzerinde, 4 ü d_2 doğrusu üzerinde 9 nokta verilmiştir.

a) Köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen elde edilebileceğini bulunuz.

b) Köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan üçgenlerden kaç tanesinin bir köşesinin A noktası olduğunu bulunuz.



Çözüm

a) Bu sorunun çözümü aşağıdaki gibi iki farklı şekilde yapılabilir.

1. yol

Şekildeki 9 noktadan seçilebilecek üçerli nokta gruplarının sayısı $\binom{9}{3}$ dur.

d_1 üzerindeki 5 noktadan herhangi üçü doğrusal olup bir üçgen belirtmeyeceğinden $\binom{5}{3}$ ve d_2 üzerindeki 4 noktadan herhangi üçü doğrusal olup bir üçgen belirtmeyeceğinden $\binom{4}{3}$ değerleri $\binom{9}{3}$ değerinden çıkarılır.

$$\binom{9}{3}-\binom{5}{3}-\binom{4}{3}=\frac{9!}{6!\cdot 3!}-\frac{5!}{2!\cdot 3!}-\frac{4!}{1!\cdot 3!}$$

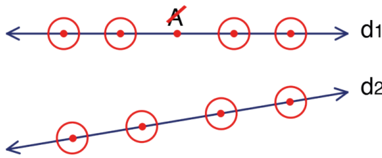
$$=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{3!}}-\frac{4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=84-10-4=70 \text{ olur.}$$

2. yol

Köşeleri şekildeki 9 noktadan herhangi üçü olan üçgenlerin sayısı d_1 doğrusu üzerindeki 5 noktadan 2 si ve d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan 1 i veya d_1 doğrusu üzerindeki 5 noktadan 1 i ve d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan 2 si seçilerek bulunur. Buradan üçgen sayısı $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}=70$ olur.

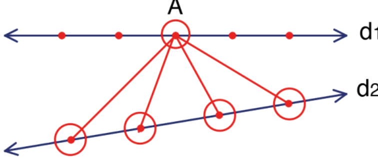
b) Oluşturulacak üçgenlerin bir köşesi d_1 doğrusu üzerindeki A noktasıdır. Diğer 2 noktanın seçimi ise (aynı doğru üzerindeki üç nokta üçgen belirtmediğinden) iki farklı durum ile yapılır.

1. durum



Biri d_1 doğrusu üzerinde kalan 4 noktadan, diğeri d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}$ kadar farklı sayıda seçilebilir.

2. durum

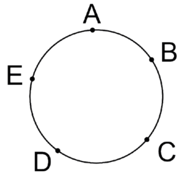


2 si de d_2 doğrusu üzerindeki 4 noktadan $\binom{4}{2}$ kadar farklı sayıda seçilebilir. Bu durumda 1. ve 2. durumdan bir köşesi A noktası olan üçgen sayısı,

$$\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}+\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{2}=4\cdot 4+\frac{4!}{2!\cdot 2!}=16+\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}}=16+6=22 \text{ olur.}$$



Örnek 53



Şekildeki çember üzerinde 5 farklı nokta bulunmaktadır. Köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

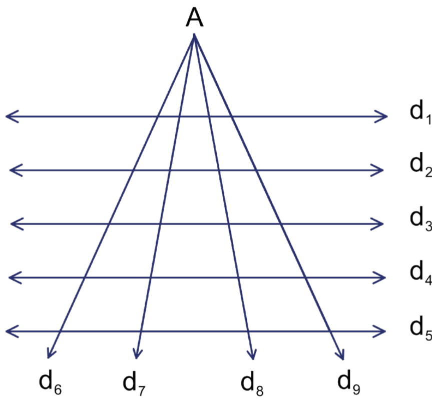


Çözüm

Düzlemde köşeleri bu 5 noktadan herhangi üçü olan üçgenlerin sayısı, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$ olur.



Örnek 54



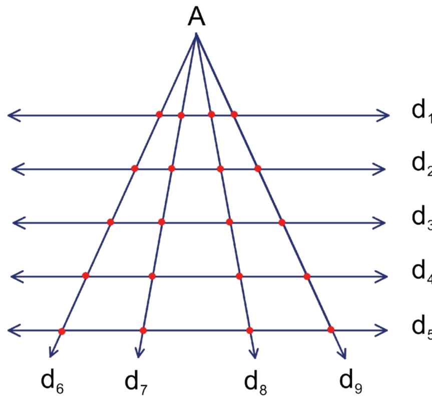
Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$ olduğuna göre

a) Şekilde kaç farklı üçgen olduğunu bulunuz.

b) Şekilde kaç farklı yamuk olduğunu bulunuz.



Çözüm



a) Bu sorunun çözümü aşağıdaki gibi iki farklı şekilde yapılabilir.

1. yol

Şekildeki her üçgenin bir köşesi A noktası olduğundan diğer iki köşesi d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 doğruları ile d_6, d_7, d_8, d_9 doğrularının kesim noktalarından seçilir. d_1 doğrusu üzerindeki 4 kesim noktasından 2 si, $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçilir. Aynı şekilde d_2, d_3, d_4, d_5 doğruları üzerindeki her 4 kesim noktasından 2 si, $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçilir. Paralel 5 doğru olduğundan toplam üçgen sayısı $\binom{4}{2} \cdot 5 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ olur.

2. yol

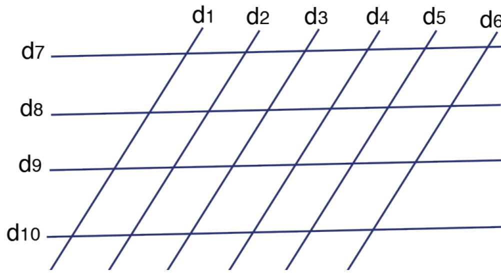
Bir noktası A olan üçgenin diğer iki köşesini belirlemek için d_6, d_7, d_8, d_9 doğrularından iki tanesi ve d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 doğrularından bir tanesi seçilip kesiştirilerek elde edilen ikişer nokta kullanılabilir. Kesiştirilecek doğruların seçimi $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30$ farklı biçimde yapılır. Böylece şekilde köşe noktalarından biri A olan 30 adet üçgen olduğu anlaşılır.

b) Birbirine paralel yatay 5 doğrudan 2 sinin ve A noktasından geçen 4 doğru parçasından 2 sinin seçilmesiyle yamuklar oluşur.

Şekildeki toplam yamuk sayısı, $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{2! \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} = 6 \cdot 10 = 60$ olur.



Örnek 55



Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel d_6$ ve $d_7 \parallel d_8 \parallel d_9 \parallel d_{10}$ olmak üzere

a) Kaç farklı paralelkenar olduğunu bulunuz.

b) Bir kenarı d_1, diğer kenarı d_7 doğrusu üzerinde olan kaç farklı paralelkenar olduğunu bulunuz.



Çözüm

a) Yatay doğrulardan herhangi ikisi ve düşey doğrulardan herhangi ikisi seçilerek paralelkenarlar oluşturulabilir. Buna göre oluşturulabilecek tüm paralelkenarların sayısı,

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2!\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}}=15\cdot 6=90 \text{ olur.}$$

b) Düşey paralel doğrulardan biri d_1 ise diğeri d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 doğruları arasından seçilir.

Yatay paralel doğrulardan biri d_7 ise diğeri d_8, d_9, d_{10} doğruları arasından seçilir. Buradan oluşturulabilecek tüm paralelkenarların sayısı, $\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}=5\cdot 3=15$ olur.



Örnek 56



5 kişilik bir toplantıda herkes birbiriyle birer kez tokalaştığına göre bu toplantıdaki toplam tokalaşma sayısını bulunuz.



Çözüm

Tokalaşma iki kişi arasında olacağından 5 kişiden 2 kişinin seçilme sayısı kadar tokalaşma olur. Dolayısıyla $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{3!}}=10$ farklı şekilde tokalaşma olur.

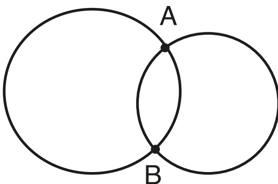


Örnek 57

Aynı düzlemdeki yarıçapları farklı olan 6 çemberin **en çok** kaç farklı noktada kesişebileceğini bulunuz.



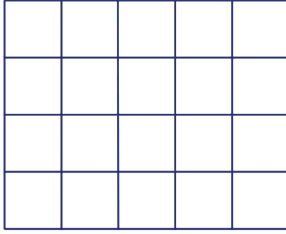
Çözüm



6 farklı çemberden ikisi $\binom{6}{2}=15$ farklı şekilde seçilir. Seçilen her 2 çember en çok iki farklı noktada kesiştirilebileceğinden oluşabilecek toplam kesim noktası sayısı, $2\cdot\binom{6}{2}=2\cdot 15=30$ olur.



Örnek 58



20 birimkareden oluşan yandaki dikdörtgende,

a) Kaç farklı dikdörtgen olduğunu bulunuz.

b) Alanı en çok 9 birimkare olan kaç farklı kare olduğunu bulunuz.

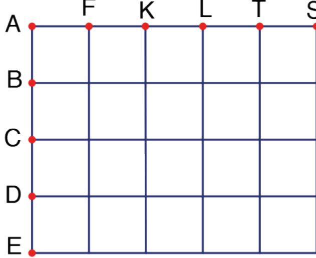


Çözüm

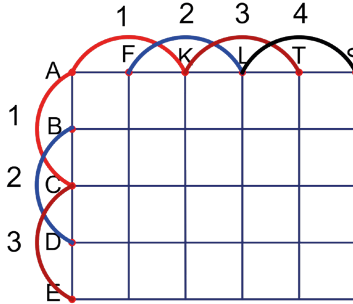
a) Bir dikdörtgen elde edilebilmesi için yatay ve paralel iki doğru ve bu doğruları dik kesen düşey ve paralel iki doğruya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla yatay 5 doğrudan herhangi 2 si ve düşey 6 doğrudan herhangi 2 si seçilerek bu doğrulardan elde edilen toplam dikdörtgen sayısı,

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2!\cdot \cancel{4!}}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}=15\cdot 10=150 \text{ olur.}$$

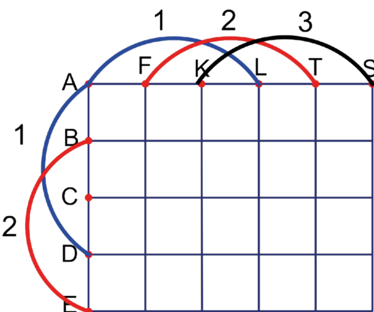
b) Verilen şekilde,



- Kenar uzunluğu 1 birim (alanı 1 birimkare) olan karelerin sayısı, [AE] üzerindeki 4 doğru parçasından ([AB], [BC], [CD], [DE]) birinin ve [AS] üzerindeki 5 doğru parçasından ([AF], [FK], [KL], [LT], [TS]) birinin seçilme sayısının çarpılmasıyla elde edilir. Bu durumda alanı 1 birimkare olan karelerin sayısı, $\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{1}=4\cdot 5=20$ olur.



- Kenar uzunluğu 2 birim (alanı 4 birimkare) olan karelerin sayısı [AE] üzerindeki 3 doğru parçasından ([AC], [BD], [CE]) birinin ve [AS] üzerindeki 4 doğru parçasından ([AK], [FL], [KT], [LS]) birinin seçilme sayısının çarpılmasıyla elde edilir. Bu durumda alanı 4 birimkare olan karelerin sayısı, $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}=3\cdot 4=12$ olur.

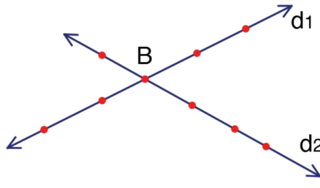


- Kenar uzunluğu 3 birim (alanı 9 birimkare) olan karelerin sayısı [AE] üzerindeki 2 doğru parçasından ([AD], [BE]) birinin ve [AS] üzerindeki 3 doğru parçasından ([AL], [FT], [KS]) birinin seçilme sayısının çarpılmasıyla elde edilir. Bu durumda alanı 9 birimkare olan karelerin sayısı, $\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}=2\cdot 3=6$ olur.

Buradan alanı en çok 9 birimkare olan farklı kare sayısı, $20+12+6=38$ olur.



Örnek 59



Yandaki şekilde B noktası üzerinde kesişen iki doğru verilmiştir. Bu doğrular üzerindeki 9 noktanın herhangi ikisinden geçen kaç farklı doğru çizilebileceğini bulunuz.



Çözüm

1. yol

Aynı düzlemde farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçeceğinden 9 noktadan geçen doğru sayısı, en çok $\binom{9}{2}$ dur.

Yukarıdaki şekilde d_1 doğrusu üzerindeki doğrusal 5 noktadan yalnız bir doğru geçtiğinden $\binom{5}{2}$ kadar ve d_2 doğrusu üzerindeki doğrusal 5 noktadan yalnız bir doğru geçtiğinden $\binom{5}{2}$ kadar aynı doğru oluşur. Bu doğru sayıları; 9 noktadan geçen doğru sayılarının tümü olan $\binom{9}{2}$ ndan çıkarılır, sonuca 2 eklenirse (d_1 ve d_2 doğruları) bu durumda d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki 9 noktadan geçen doğru sayısı,

$$\binom{9}{2}-\binom{5}{2}-\binom{5}{2}+1+1=\frac{9!}{2!\cdot 7!}-\frac{5!}{2!\cdot 3!}-\frac{5!}{2!\cdot 3!}+2$$
$$=\frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{2!\cdot \cancel{7!}}-\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}-\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}+2$$
$$=36-10-10+2$$
$$=18 \text{ olur.}$$

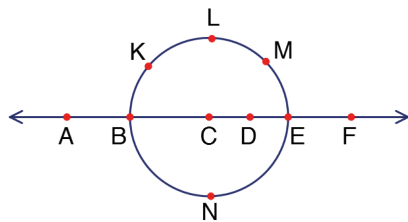
2. yol

B noktası ile B noktası dışındaki herhangi bir nokta seçilirse bu noktalardan geçen doğrular d_1 veya d_2 doğrularıdır.

B noktası dışındaki d_1 doğrusu üzerindeki 4 noktadan 1 i ve d_2 doğrusu üzerindeki B noktası dışındaki 4 noktadan 1 i ile oluşturulabilecek doğruların sayısı $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}=16$ olur. Bu doğru sayısına d_1 ve d_2 doğrularının sayısı olan 2 eklenirse çizilebilecek toplam doğru sayısı $16+2=18$ bulunur.



Örnek 60



Köşeleri yandaki şekilde verilen çember ve doğru üzerinde bulunan toplam 10 noktadan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.



Çözüm

Şekildeki 10 noktadan seçilebilecek üçerli noktaların sayısı $\binom{10}{3}$ dur. Doğrusal 6 noktadan seçilen herhangi üç nokta bir üçgenin köşeleri olamayacağından elde edilebilecek üçgen sayısı,

$$\binom{10}{3}-\binom{6}{3}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}-\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{3!\cdot \cancel{7!}}-\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{3!\cdot \cancel{3!}}=120-20=100 \text{ olur.}$$



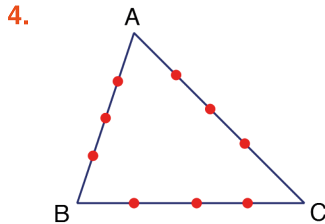
ALIŞTIRMALAR

1. $A=\{a, e, k, y, n, p, r\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde **en az** bir sesli harf bulunduğunu hesaplayınız.

2. $\binom{n+4}{n+3}+\binom{n+5}{n+4}-P(n,1)=12$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

3. Bir şirketteki 6 müfettiş, 2 bölgedeki bayi denetimi için görevlendirilecektir. Bu 2 bölgenin her birine **en az** bir müfettiş görevlendirmek üzere bu müfettişlerin kaç farklı biçimde görevlendirilebileceğini bulunuz.

4.

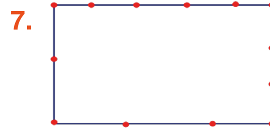


Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeni üzerinde toplam 9 nokta vardır. Bu noktaların herhangi ikisinden geçen **en çok** kaç farklı doğru çizilebileceğini bulunuz.

5. 10-B sınıfı 13 ü kız, 11 i erkek 24 kişilik bir sınıftır. Öğrencilerin 10-C sınıfından ameliyat olan arkadaşlarını ziyaret etmeleri için sınıf öğretmenlerinin 2 si kız, 1 i erkek 3 kişilik bir grubu kaç farklı şekilde seçebileceğini bulunuz.

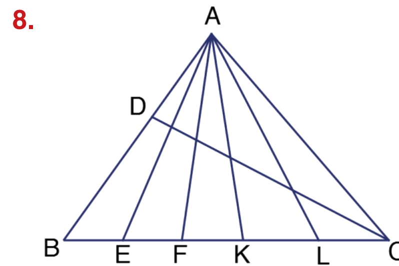
6. İki farklı hediyenin 5 çocuktan herhangi ikisinden her birine birer hediye verilmek şartıyla kaç farklı şekilde verilebileceğini bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde verilen dikdörtgen üzerindeki 13 noktadan köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan **en çok** kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde kaç farklı üçgen olduğunu bulunuz.

10.1.1.5. Pascal Üçgeni



Bilim İnsanları



Blaise Pascal (Bleyz Paskal)

Fransa'da doğan Blaise Pascal (Bleyz Paskal) (1623-1662), matematiğe ve geometriye olan büyük ilgisi nedeniyle daha 12 yaşındayken geometri üzerinde çalışmaya başladı. Babası vergi toplayıcısı olarak atandığında vergileri toplamasına yardımcı olmak amacıyla 1642-1645 yılları arasında üç yıl çalışarak ilk sayısal hesap makinesi olan ve "Pascalin" adı verilen cihazı icat etti. Daha sonra fizik ve matematik üzerine çalışmaya başladı. 1653'te sıvıların dengeleri üzerine hazırladığı tez ile Pascal, basınç ile ilgili kanununu ortaya koydu. Bu tez, bilim insanlarınca bilim tarihinde hidrostatik sistemin tam bir taslağı ve Pascal'ın fizik teorisine yaptığı en önemli katkı olarak kabul edildi. Pascal ayrıca geometride koniklerle ilgili birçok teorem geliştirdi. Pascal üçgeni, matematikte binom katsayılarını içeren üçgensel bir dizidir.

Ünlü matematikçi Pascal, aritmetik üçgen üzerine bir tez yazmış; burada üçgenin özelliklerini ortaya koymuştur. Ancak Pascal, bu üçgeni çizen veya inanılmaz özelliklerini fark eden ilk kişi değildir. Üçgenin bu özellikleri kendi zamanına kadar birçok medeniyet tarafından bulunmuş, bu üçgen farklı adlarla ifade edilmiştir. Örneğin Hintli matematikçiler bu üçgeni "Meru Dağı'nın Merdivenleri", Çinli matematikçiler "Yang Hui üçgeni", İranlı matematikçiler ise "Hayyam üçgeni" olarak adlandırmışlardır. Pascal'dan daha önce, 10. yüzyılda Hintli matematikçiler bu sayı dizisini şiirin ölçülerindeki kısa ve uzun seslerin birleşimlerinin sayısını temsil etmek için kullanmışlardır. Sonraki yüzyıllarda Batı dünyasında bilimin gelişmesi ile bu üçgen günümüzde Fransız matematikçi ve filozof Pascal'ın adıyla anılmaktadır.



Ömer Hayyam heykeli

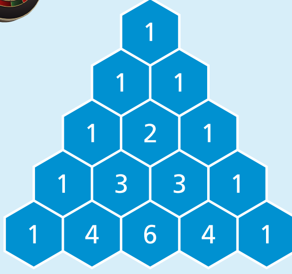
Üçgen, 11. yüzyılda İran'da yaşayan ünlü gökbilimci, şair, filozof ve matematikçi olan Ömer Hayyam'ın yazılarında da görülmüştür. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki terimlerin katsayıları ile oluşturulan şemanın (Pascal üçgeni) Ömer Hayyam'a ait olduğu ileri sürülmektedir. Hayatını bilimsel araştırmalara adamış olan Ömer Hayyam'ın analitik geometrinin gelişimi üzerindeki etkisi çok büyüktür. Hayyam aynı zamanda irrasyonel sayıların da rasyonel sayılar gibi kullanılabileceğini ilk defa kanıtlamıştır. İrrasyonel sayıların varlığını göstererek Öklidyen olmayan geometrilerin olduğunu ifade etmiştir. Hayyam, $x^3+200x=20x^2+200$ şeklindeki kübik denklemin pozitif x değerlerini (köklerini) bulmuştur. Bu çözümünü geometrik olarak da konik kesiti olarak da ortaya koymuştur. Üçüncü dereceden denklemleri de kapsayan birçok cebirsel denklemi sınıflandırmış ve bunlara çözüm yolu bulmuştur. Cebirsel denklemlerin çözümünü konikleri kesiştirerek bulmaya çalışmış ve bunu bir metoda çevirmek için uğraşmıştır. Üçüncü derece denklemleri "üç terimliler" ve "dört terimliler" olarak iki kategoriye ayırmış ve her kategoriyi kendi içinde sınıflandırmıştır. Her biri için genel çözümler bulmaya çalışmış ayrıca üçüncü dereceden 13 denklemi konikler üzerine inşa etmiştir. Denklemlerde bilinmeyenleri önce "şey", sonra "x" ile ifade etmiştir. Üçüncü derece denklemlerin genel çözümünün hesaplama ile dördüncü derece denklemlerin ise geometri ile çözülemeyeceğini düşünmüştür. Aritmetik metotlarla çözülemeyeceğine inandığı denklemleri çember, parabol ve hiperbol kullanarak çözmüştür. Ömer Hayyam'ın bilime bir diğer katkısı da mevsimlere tam olarak uyum gösteren, hata payı 5000 yılda 1 gün olan Celâli takvimidir. Bu takvimle bir yılın 365,24219858156 gün olduğunu hesaplamıştır.

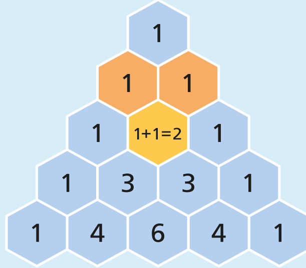
Üçgen ile ilgili Pascal'dan önceki bir diğer çalışma da Çinlilere aittir. Çinli matematikçi Chu Shih Chieh (Çu Sih Çieh), üçgeni 14. yüzyılın başlarında tasvir etmiş ve 1303 tarihli "Dört Elementli Kıymetli Ayna" adlı kitabında binom genişlemesi için katsayılar sağlamada üçgenin kullanımını anlatmıştır **(Unat, 2007, s. 66-68; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pascal.html).**

Düzenlenmiştir.



Bilgi



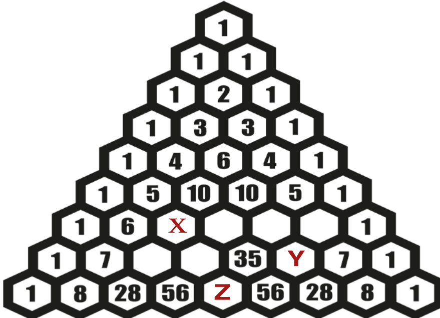


Yandaki şekilde görüldüğü gibi

- Pascal (Paskal) üçgeninin tepesinde 1 sayısı bulunmaktadır.
- Her satırdaki eleman sayısı bir önceki satırdaki eleman sayısından 1 fazladır.
- Her satır 1 ile başlayıp 1 ile biter. Diğer sayılar ise bir üst satırdaki kendine komşu olan iki sayının toplamıdır.
- Pascal üçgenindeki her satır verilen bu örüntüye bağlı kalarak devam eder.



Örnek 61



Yanda verilen Pascal üçgeninde X, Y ve Z değerlerini bulunuz.



Çözüm

X değeri bir üst satırda kendisine komşu olan 5 ile 10 sayılarının toplamı olan 15 tir.
Y ile 7 nin toplamı bir alt satırdaki 28 sayısına eşit olduğundan Y, 21 sayısına eşittir.
X in sağındaki ilk sayı $10+10=20$ dir. 35 sayısının solundaki ilk sayı ise X ile 20 nin toplamı olan 35 tir.
Buradan Z sayısı bir üst satırda kendisine komşu sayılar olan 35 ile 35 in toplamı olan 70 tir.



ALIŞTIRMALAR

1. Pascal üçgeninin 7 elemanlı satırındaki sayıların toplamının kaç olduğunu bulunuz.

2. Pascal üçgeninin 8 elemanlı satırındaki en büyük sayının kaç olduğunu bulunuz.

10.1.1.6. Binom Açılımı

Aşağıdaki özdeşlikleri inceleyiniz.

$(x+y)^2=(x+y)\cdot(x+y)=x^2+2xy+y^2$

$(x+y)^3=(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

Yukarıdaki özdeşliklerin bulunmasında çarpma yöntemi ile kolayca sonuca ulaşılabilir. $(x+y)^{10}$ ifadesinin açılımının bulunmasında ise bu yöntemin uygulanmasının zor olacağı ve zaman alacağı görülür. Bu nedenle kuvvetleri 4 ve 4 ten büyük olan ifadelerin açılımında aşağıdaki yöntemin uygulanması daha uygun olur.



Bilgi

$x+y\neq 0$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin

$$(x+y)^n=\underbrace{\binom{n}{0}\cdot x^{n-0}\cdot y^0}_{1.\ \text{terim}}+\underbrace{\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot y^1}_{2.\ \text{terim}}+\underbrace{\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot y^2}_{3.\ \text{terim}}+\ldots+\underbrace{\binom{n}{n}\cdot x^{n-n}\cdot y^n}_{(n+1).\ \text{terim}}$$

şeklindeki açılımına **binom açılımı** denir.
Baştan $(r+1)$. terim aynı zamanda sondan $(n-r+1)$. terimdir $(r\leq n$ ve $r\in\mathbb{N})$.

(Bu açılım x in azalan, y nin artan kuvvetlerine göre yapılmıştır.)



Örnek 62

$(x+y)^2$ ve $(x-y)^3$ ifadelerinin özdeşini binom açılımı yardımıyla bulunuz.



Çözüm

$$(x+y)^2=\binom{2}{0}\cdot(x)^{2-0}\cdot(y)^0+\binom{2}{1}\cdot(x)^{2-1}\cdot(y)^1+\binom{2}{2}\cdot(x)^{2-2}\cdot(y)^2$$
$$=1\cdot x^2\cdot 1+2\cdot x\cdot y+1\cdot 1\cdot y^2$$
$$=x^2+2xy+y^2 \text{ olur.}$$

$$(x-y)^3=\binom{3}{0}\cdot(x)^{3-0}\cdot(-y)^0+\binom{3}{1}\cdot(x)^{3-1}\cdot(-y)^1+\binom{3}{2}\cdot(x)^{3-2}\cdot(-y)^2+\binom{3}{3}\cdot(x)^{3-3}\cdot(-y)^3$$
$$=1\cdot x^3\cdot 1+3\cdot x^2\cdot(-y)+3\cdot x\cdot(-y)^2+1\cdot 1\cdot(-y)^3$$
$$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \text{ olur.}$$



İpucu

$(x+y)^n$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot y^r$ olur.



Buluyorum

$(x+y)^n$ açılımının katsayıları olan $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ ifadelerinin Pascal üçgenindeki karşılığı aşağıdaki gibidir.

	Pascal üçgeni	Binom açılımının katsayıları
$(x+y)^0$ →	$1 \cdot 1$	$\binom{0}{0}$
$(x+y)^1$ →	$1 \cdot x + 1 \cdot y$	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$(x+y)^2$ →	$1x^2 + 2xy + 1y^2$	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$(x+y)^3$ →	$1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$(x+y)^4$ →	$1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$



Örnek 63

$(3x+2)^4$ ifadesinin açılımını bulunuz.



Çözüm

$$(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^{4-0}\cdot 2^0 + \binom{4}{1}(3x)^{4-1}\cdot 2^1 + \binom{4}{2}(3x)^{4-2}\cdot 2^2 + \binom{4}{3}(3x)^{4-3}\cdot 2^3 + \binom{4}{4}(3x)^{4-4}\cdot 2^4$$

$$= 1\cdot 81x^4\cdot 1 + 4\cdot 27x^3\cdot 2 + 6\cdot 9x^2\cdot 4 + 4\cdot 3x\cdot 8 + 1\cdot 1\cdot 16$$

$$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$



Örnek 64

$(x+2)^4$ açılımının

a) Kaç terimi olduğunu bulunuz.

b) Katsayılarının toplamını bulunuz.

c) Sabit terimini bulunuz.



Çözüm

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}x^4\cdot 2^0 + \binom{4}{1}x^3\cdot 2^1 + \binom{4}{2}x^2\cdot 2^2 + \binom{4}{3}x^1\cdot 2^3 + \binom{4}{4}x^0\cdot 2^4$$

$$= 1\cdot x^4\cdot 2^0 + 4\cdot x^3\cdot 2^1 + 6\cdot x^2\cdot 2^2 + 4\cdot x^1\cdot 2^3 + 1\cdot x^0\cdot 2^4$$

$$= 1\cdot x^4 + 8\cdot x^3 + 24\cdot x^2 + 32\cdot x^1 + 16$$

a) Yukarıda görüldüğü gibi terim sayısı kuvvetin bir fazlası olan $4+1=5$ olur.

b) Katsayılar toplamı, $1+8+24+32+16=81$ olur. Bu sonuç x yerine 1 yazılarak da bulunabilir.

c) Yukarıdaki açılımda sabit terim 16 dır. Bu sonuç x yerine 0 yazılarak da bulunabilir.



İpucu

$x + y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında

- $(n+1)$ tane terim vardır.
- Her bir terimdeki x ve y değişkenlerinin üsleri toplamı n dir.
- Katsayılar toplamını bulmak için değişkenler yerine 1 sayısı yazılır.
- Sabit terimi bulmak için değişkenler yerine 0 sayısı yazılır.



Örnek 65

$(3x - 4)^5$ açılımının

a) Kaç terimi olduğunu bulunuz.
b) Katsayılarının toplamını bulunuz.
c) Sabit terimini bulunuz.



Çözüm

a) Kuvvet 5 olduğundan açılımın terim sayısı $5+1=6$ olur.
b) Katsayılar toplamı, x yerine 1 yazılırsa $(3 \cdot 1 - 4)^5 = (-1)^5 = -1$ olarak bulunur.
c) Sabit terim, x yerine 0 yazılırsa $(3 \cdot 0 - 4)^5 = (-4)^5 = -1024$ olarak bulunur.



Örnek 66

$(x - 3y)^9$ açılımındaki terimlerden birisi $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a \cdot x^{2n-1} \cdot y^{4+n}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.



Çözüm

$(x - 3y)^9$ ifadesinin açılımında x ve y değişkenlerinin üsleri toplamı 9 dur.

$2n - 1 + 4 + n = 9$
$3n + 3 = 9$ ve $n = 2$ olur.



Örnek 67

$(2x^2 - 3y^3)^9$ ifadesinin açılımındaki $x^4 \cdot y^n$ li terimdeki n değerini bulunuz.



Çözüm

$(2x^2 - 3y^3)^9$ ifadesinin açılımında baştan $(r+1)$. terim $x^4 \cdot y^n$ li terim olsun. $\binom{9}{r} \cdot (2x^2)^{9-r} \cdot (-3y^3)^r$ ifadesinden x ve y bulunduran terimler alınırsa $x^{18-2r} \cdot y^{3r}$ elde edilir. Bu durumda $18 - 2r = 4$ ve $n = 3r$ olur. Buradan $r = 7$ ve $n = 3r = 3 \cdot 7 = 21$ olur.



İpucu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki

- Baştan $r+1$ inci terim $\binom{n}{r}(x)^{n-r} \cdot (y)^r$ dir.
- Sondan $r+1$ inci terim $\binom{n}{r}(x)^{r} \cdot (y)^{n-r}$ dir.
- n çift sayı ise $(x+y)^n$ açılımında, ortadaki terim bulunurken $r = \frac{n}{2}$ alınır. n, tek sayı ise terim sayısı $n+1$ tane, yani çift sayıda olacağından "ortadaki terim" olmayacaktır.



Örnek 68

$(3x-y)^8$ ifadesinin açılımındaki terimler x in azalan kuvvetlerine göre sıralandığında baştan 7 nci terimi bulunuz.



Çözüm

$(3x-y)^8$ ifadesinin açılımındaki baştan $r+1$ inci terim $\binom{8}{r}(3x)^{8-r} \cdot (-y)^r$ dir.

$r+1 = 7 \Rightarrow r = 6$ olup baştan 7 nci terim $\binom{8}{6}(3x)^{8-6} \cdot (-y)^6 = 28 \cdot 9x^2 \cdot y^6 = 252x^2y^6$ olur.



Örnek 69

$\left(a^3 - \frac{1}{a}\right)^6$ ifadesinin açılımında a^6 lı terimin katsayısını bulunuz.



Çözüm

$\left(a^3 - \frac{1}{a}\right)^6$ ifadesinin açılımındaki baştan $(r+1)$. terimi $A \cdot a^6$ olsun. Buradan

$A \cdot a^6 = \binom{6}{r}(a^3)^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^r$

$A \cdot a^6 = \binom{6}{r}a^{18-3r} \cdot (-a^{-1})^r$

$A \cdot a^6 = \binom{6}{r}a^{18-3r} \cdot (-1)^r \cdot a^{-r}$

$A \cdot a^6 = \binom{6}{r}a^{18-4r} \cdot (-1)^r$ olur.

Buradan a nın üsleri eşitlenerek $18-4r = 6 \Rightarrow r = 3$ bulunur. $(r+1)$. terim,

$A \cdot a^6 = \binom{6}{3}(a^3)^{6-3} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^3 = \binom{6}{3}a^9 \cdot (-a^{-1})^3 = -20 \cdot a^9 \cdot a^{-3} = -20a^6$ olur.

Dolayısıyla a^6 lı terimin katsayısı $A = -20$ bulunur.



Örnek 70

$(x^2 - 2y)^6$ ifadesinin x^2 nin azalan kuvvetlerine göre açılımında ortadaki terimi bulunuz.



Çözüm

$r = \frac{n}{2} \Rightarrow r = \frac{6}{2} = 3$ olup ortadaki terim, $\binom{6}{3}(x^2)^{6-3} \cdot (-2y)^3 = 20 \cdot x^6 \cdot 8 \cdot (-y^3) = -160x^6y^3$ olur.



Örnek 71

$(x+y)^n$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 8. terim aynı zamanda sondan 7. terim oluyorsa n değerini bulunuz.



Çözüm

Baştan $(r+1)$. terim aynı zamanda sondan $(n-r+1)$. terimdir. Buradan $r+1=8$ ve $r=7$ olur. $n - r + 1 = 7 \Rightarrow n - 7 + 1 = 7 \Rightarrow n = 13$ olur.



Örnek 72

$\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)^9$ ifadesinin açılımındaki sabit terimi bulunuz.



Çözüm

$\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)^9$ ifadesinin sabit terimi a^0 ın katsayısıdır. Buradan $\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)^9$ ifadesinin açılımında baştan

$(r+1)$. terim $A \cdot a^0$ ise $\binom{9}{r}(2a)^{9-r} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^r = \binom{9}{r}(2a)^{9-r} \cdot (a^{-2})^r$

$a^{9-r} \cdot a^{-2r} = a^0 \Rightarrow a^{9-3r} = a^0 \Rightarrow 9 - 3r = 0$ olup $r = 3$ olur.

A katsayısı, $\binom{9}{3}(2a)^{9-3} \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = \binom{9}{3}(2a)^{9-3} \cdot (a^{-2})^3 = 84 \cdot 2^6 \cdot a^6 \cdot a^{-6} = 5376$ olur.



Örnek 73

$(x^2+y^3)^n = ... + A \cdot x^6 \cdot y^{12} + ...$ açılımındaki $n + A$ gerçek sayısını bulunuz.



Çözüm

$(x^2+y^3)^n$ ifadesinin açılımındaki baştan $(r+1)$. terimi $A \cdot x^6 \cdot y^{12}$ olsun.

Buradan $\binom{n}{r}(x^2)^{n-r} \cdot (y^3)^r = \binom{n}{r}x^{2n-2r} \cdot y^{3r}$ elde edilir.

Bu ifade de $y^{3r} = y^{12} \Rightarrow 3r = 12 \Rightarrow r = 4$ ve

$x^{2n-2r} = x^6 \Rightarrow 2n - 2r = 6 \Rightarrow n - r = 3 \Rightarrow n = 3 + r \Rightarrow n = 3 + 4 \Rightarrow n = 7$ olur.

A katsayısı, $\binom{7}{4}(x^2)^{7-4} \cdot (y^3)^4 = \binom{7}{4}x^6 \cdot y^{12} = 35x^6 \cdot y^{12}$ olup $A = 35$ bulunur.

Buradan $n + A = 7 + 35 = 42$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. $(x-3y)^3$ ifadesinin açılımını yazınız.

2. $(7x^2-2)^{10}$ ifadesinin açılımındaki sabit terimi bulunuz.

3. $(6x-5y)^{20}$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamını bulunuz.

4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(3a^2-4b)^n$ ifadesinin açılımında 10 terim bulunduğuna göre bu terimlerin katsayıları toplamını bulunuz.

5. $(3x-y^2)^{10}$ ifadesinin açılımındaki y^8 li terimin katsayısını bulunuz.

6. $(a^2-b^3)^6$ ifadesinin a^2 nin azalan kuvvetlerine göre açılımında ortadaki terimi bulunuz.

7. $(3x+2b)^7$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan 6 ncı terimi bulunuz.

8. $\left(a^3+\frac{2}{a^2}\right)^5$ ifadesinin açılımındaki sabit terimi bulunuz.

9. $\left(m^2-\frac{1}{m}\right)^7$ ifadesinin m^2 nin azalan kuvvetlerine göre açılımında sondan 2 nci terimi bulunuz.

10. $(a^3+2ab^2)^6 = a^{18} + ... + A \cdot a^{12}b^n + ...$ olduğuna göre $A+n$ yi bulunuz.

10.1.2. Basit Olayların Olasılıkları

Terimler ve Kavramlar
- Örnek Uzay, Olay, Deney, Çıktı
- Kesin Olay, İmkânsız Olay
- Ayrık Olay, Ayrık Olmayan Olay
- Bir Olayın Tümleyeni
- Olasılık

Sembol ve Gösterimler
- E, P(A), P(A′)



Neler Öğreneceksiniz?

- Örnek uzay, deney, çıktı, bir olayın tümleyeni, kesin olay, imkânsız olay, ayrık olay ve ayrık olmayan olay kavramlarını,
- Olasılık kavramı ile ilgili uygulamalar yapmayı öğreneceksiniz.

10.1.2.1. Örnek Uzay, Deney, Çıktı, Bir Olayın Tümleyeni, Kesin Olay, İmkânsız Olay, Ayrık Olay ve Ayrık Olmayan Olay

Hayat boyunca çoğu kez sonucu tam bilinmeden birçok karar verilir. Aslında bu kararlar verilirken farkında olunarak ya da olunmayarak olası sonuçlar göz önünde bulundurulur ve istenilen duruma göre gerçekleşme olasılığı yüksek olan seçimler yapılır. Örneğin liselere girişte yapılan sınav sonucuna göre lise tercihi yapılırken alınan puanla en iyi tercihin yapılabilmesi için yerleşilebilecek okulların



- Üniversiteye öğrenci yerleştirme başarı yüzdesi,
- Öğrencilerine sunduğu sosyal gelişim etkinlikleri,
- Ulaşım imkânları,
- Öğle yemeği hizmeti gibi kriterleriyle ilgili araştırma yapılır. İhtiyaçları en fazla karşılama ihtimali olan okul tercih edilir.





Çiftçiler ekme, gübreleme ve hasat zamanlarını hava durumu raporuna göre belirlerler.

Ameliyat olacak bir hastaya doktor tarafından ameliyatın başarı yüzdesinin söylenmesi, hastanın ameliyatı kabul edip etmemesine yardımcı olur.

Sigorta şirketleri; araç sigorta tutarlarını aracın yıl içerisinde kaza yapma sayısı, marka ve modeli, yaşı ve trafikte bulunma sıklığı gibi kriterleri göz önünde bulundurarak belirler.

Günlük hayatta yukarıda bahsedilen bu ve benzeri durumlarla ilgili karar verilirken beklenen bir olayın gerçekleşme ihtimali göz önünde bulundurulmaktadır.



Bilgi

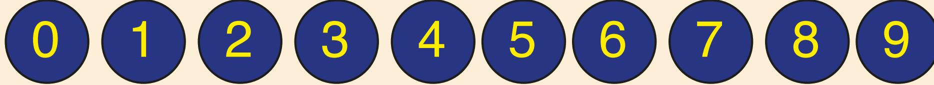
Tekrarlanabilen, farklı tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen süreçlere birer **deney** denir. Bir deneyde elde edilen sonuçların her birine o deneye ait **çıktı** denir. Örneğin havaya madenî para atma bir deneydir ve burada yere düşen madenî paranın üst yüzündeki "yazı" ya da "tura" sonuçları bu deneye ait çıktılardır. Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin **örnek uzayı** denir. Örnek uzay, genellikle E ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya **A olayının tümleyeni** denir ve A' ile gösterilir.

Bir madenî paranın bir defa atılması deneyindeki basit olaylar $\{yazı\}$ ve $\{tura\}$ olur.



İpucu



Tüm rakamların yazılı olduğu bilyeler bir torbaya konuluyor. Torbadan "rastgele" bir bilye çekilip üzerinde yazılan sayıya bakılıyor. Bu işlem bir deneydir.

Torbadaki tüm bilyelerde yazan rakamlar, örnek uzayı oluşturur. Örnek uzay kümesi $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dur ve örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 10$ olur.

Torbadan çekilen bilyelerin üzerinde çift rakam yazma olayı, A ise $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $s(A) = 5$ olur. Torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde 7 rakamının yazması, bir basit olaydır.

Torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazması olayı, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ise B olayının tümleyeni, "torbadan çekilen bir bilyenin üzerinde asal sayı yazmaması" olayıdır. Bu olay, $B' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ şeklinde yazılır. $s(B) + s(B') = s(E)$ olduğuna dikkat ediniz.



Örnek 1

Bir madenî paranın, iki madenî paranın ve üç madenî paranın atılması deneylerinin örnek uzaylarını bulunuz.



Çözüm

Yazı "Y", tura "T" ile gösterilmek üzere



Bir madenî para atılması olayının örnek uzayı, $E = \{Y, T\}$ ve $s(E) = 2$ olur.



İki madenî para atılması olayının örnek uzayı $E = \{YY, YT, TY, TT\}$ ve $s(E) = 4$ olur.



Üç madenî para atılması olayının örnek uzayı,
$E = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$ ve $s(E) = 8$ olur.



İpucu

n tane madenî paranın birlikte atılması deneyi ile bir madenî paranın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve 2^n elemanlıdır.



Örnek 2

İki zarın birlikte atılması deneyinin örnek uzayını bulunuz.



Çözüm

Bir zardaki 6 farklı sayının her biri diğer zardaki 6 farklı sayının her biri ile $6 \cdot 6$ farklı şekilde eşlenebileceğinden iki zar atılması deneyinde toplam 36 farklı çıktı elde edilir.

Bu durumda örnek uzayın elemanları yanda verilen tablodaki gibi gösterilebilir.

		2. Zar					
		1	2	3	4	5	6
1. Zar	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



İpucu

n tane zarın birlikte atılması deneyi ile bir zarın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve 6^n elemanlıdır.



Örnek 3

Bir zar ve bir madenî paranın birlikte atılması deneyinin örnek uzayını bulunuz.



Çözüm

	1	2	3	4	5	6
Y	(Y, 1)	(Y, 2)	(Y, 3)	(Y, 4)	(Y, 5)	(Y, 6)
T	(T, 1)	(T, 2)	(T, 3)	(T, 4)	(T, 5)	(T, 6)

Zardaki her bir sayıya karşılık paranın iki farklı durumu olacağından $6 \cdot 2 = 12$ farklı çıktı elde edilir.

Bu durumda örnek uzayın elemanları yukarıda verilen tablodaki gibi gösterilebilir.



Bilgi

Aynı örnek uzaydaki bir olaya ait olası durumların sayısı başka bir olaya ait olası durumların sayısına eşit ise bu olaylara **eş olası olaylar**, eşit değil ise **eş olası olmayan olaylar** denir.



Örnek 4

7 basamaklı 1 212 233 sayısının her bir basamağındaki rakam bir kağıda yazılarak bir torbaya atılıyor. Torbadan bir tane kağıt çekilmesi deneyinde A olayı “kağıtta 1 yazması”, B olayı “kağıtta 2 yazması” ve C olayı ise “kağıtta 3 yazması” olarak belirleniyor. Bu olaylardan hangilerinin eş olası durumda olduğunu, hangilerinin eş olası durumda **olmadığını** bulunuz.



Çözüm

Sayı 7 basamaklı olduğundan örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 7$ ve $s(A) = 2,\ s(B) = 3,\ s(C) = 2$ olur.

- Buradan A olayı ile C olayının eleman sayısı yani olası durumlarının sayısı eşit ve 2 dir. Dolayısıyla A olayı ile C olayı eş olası durumda olan olaylardır.

- A ile B olayının eleman sayıları ve C ile B olaylarının eleman sayıları yani olası durumlarının sayıları eşit olmadığından A ile B ve C ile B olayları eş olası durumda olmayan olaylardır.



Örnek 5

3 doktor ve 4 mühendisin bulunduğu bir gruptan rastgele bir doktor ile rastgele bir mühendis seçilme olaylarının eş olası olay olup olmadıklarını bulunuz.



Çözüm

Doktorların sayısı ile mühendislerin sayısı (olası durumların sayısı) birbirine eşit olmadığından bu iki olay eş olası durumda olmayan olaylardır.



Örnek 6

Bir zar atma deneyinde eş olası durumda olan ve eş olası durumda olmayan olaylar belirtiniz.



Çözüm

Bir zar atma deneyinin örnek uzayı $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ olur.

- Tek sayı gelme olayı $A = \{1,\ 3,\ 5\}$ ve çift sayı gelme olayı $B = \{2,\ 4,\ 6\}$ olmak üzere her ikisinin de eleman sayısı (olası durumlarının sayısı) eşittir. Buradan bir zar atma deneyindeki tek sayı gelme olayı ile çift sayı gelme olayının eş olası durumda olduğu görülür.

- Gelen sayının 3 e bölünmesi olayı $C = \{3,\ 6\}$ ve gelen sayının 3 e bölünmemesi olayı $D = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ olmak üzere bu olayların eleman sayıları (olası durumlarının sayıları) eşit değildir. Buradan gelen sayının 3 e bölünüp bölünmediğinin belirlendiği bir zar atma deneyindeki durumlar eş olası değildir.



Bilgi

- Ortak elemanları olmayan kümeler ile temsil edilen olaylara **ayrık olaylar** denir. A ve B ayrık iki olay ise $A \cap B = \varnothing$ olur.

- İki olayın ortak elemanı varsa bu olaylara **ayrık olmayan olaylar** denir. A ve B ayrık olmayan iki olay ise $A \cap B \neq \varnothing$ olur.



Örnek 7

Bir zar atılması deneyinde aşağıda verilen olayların ayrık olaylar olup olmadığını bulunuz.

a) Tek sayı gelme olayı ile çift sayı gelme olayı

b) Tek sayı gelme olayı ile asal sayı gelme olayı



Çözüm

a) Tek sayı gelme olayı $A=\{1, 3, 5\}$ ve çift sayı gelme olayı $B=\{2, 4, 6\}$ olmak üzere $A \cap B = \varnothing$ olduğundan bu iki olay ayrık olaydır.

b) Asal sayı gelme olayı $C=\{2, 3, 5\}$ ve tek sayı gelme olayı $A=\{1, 3, 5\}$ olmak üzere $A \cap B = \{3, 5\} \neq \varnothing$ olduğundan bu iki olay ayrık olmayan olaydır.



Örnek 8

Bir kutuda bulunan 10 farklı toptan 2 si sarı, 3 ü kırmızı ve 5 i mavidir. Bu kutudan

a) Rastgele 1 top çekilmesi deneyine ait örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

b) Rastgele 2 topun bir defada çekilmesi deneyine ait örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

c) 3 top çekilmesi deneyinde çekilen topların 1 sarı, 1 kırmızı ve 1 mavi olması olayının eleman sayısını bulunuz.



Çözüm

a) Torbadaki 10 farklı toptan 1 topun çekilmesi deneyine ait örnek uzayın eleman sayısı, $\binom{10}{1} = 10$ olur.

b) Torbadaki 10 farklı toptan 2 topun bir defada çekilmesi deneyine ait örnek uzayın eleman sayısı, $\binom{10}{2} = 45$ olur.

c) 1 sarı, 1 kırmızı ve 1 mavi topun bir defada çekilmesi deneyindeki olayın eleman sayısı, $\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ olur.



Bilim İnsanları

Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)



Pierre de Laplace (Piyer Dö Laplas)

Fransız matematikçi Pierre de Laplace (Piyer Dö Laplas), 1812'de Théorie Analytique des Probabilités (Teori Analitik De Probabilite) (Analitik Olasılık Kuramı) adlı kitabında bir dizi yeni fikir üretmiş ve matematik tekniği ortaya çıkarmıştır. Laplace'dan önce olasılık teorisi sadece şans oyunlarının matematiksel bir analizi ile ilgili olarak görülüyordu. Laplace olasılıkla ilgili fikirlerini birçok bilimsel ve pratik probleme uygulamıştır.

Matematiğin pek çok dalında olduğu gibi olasılık teorisinin geliştirilmesi de Laplace'ın çeşitli uygulamalarıyla tetiklenmiştir. İstatistik, genetik, psikoloji, ekonomi ve mühendislik gibi alanlar olasılığın önemli birer uygulama alanıdır.

Düzenlenmiştir.



Bilim İnsanları

İlk Şifre Çözme Teknikleri ve Bilgin El Kindî

Şifreleme tarihi 3500 yıl öncesine kadar uzanır. Şifre kelimesi İngilizce "cipher" (sayfır) olarak yazılır ve Arapçadaki "sıfr" yani sıfır kelimesinden gelir. Birkaç şifreleme örneği verilecek olursa şunlardan bahsedilebilir: Roma İmparatoru Julius Caesar (Culius Sezar) MÖ 60-50 yıllarında Roma alfabesindeki harflerin yerini değiştirerek oluşturduğu şifreleme yöntemini devlet haberleşmesinde kullanmıştır. Bu yöntem, şifrelenecek metindeki her harfin alfabede kendisinden 3 sonraki harfle değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Diğer bir şifreleme yöntemi ise her harfe bir sayı belirleyen "ebced" hesabıdır. Ebced hesabı harflere sırasıyla bir sayı değeri verilmesiyle meydana getirilen bir hesaplama sistemidir ve daha çok tarih belirtmekte kullanılmıştır. Cümledeki harflerin ebced tablosundaki sayısal karşılığı ile bir olayın tarihini belirlemeye **tarih düşürme** denir. Bir başka yöntem Almanların 2. Dünya Savaşı'nda Scherbius (Şerbius) tarafından icat edilmiş yer değiştirme ile şifreleme prensibine dayanan Enigma makinesini kullanmasıdır. Bu makine ile gerçekleştirilen Alman ordusuna ait şifreleme sistemi, İngilizler tarafından kırılarak savaşta İngilizlere üstünlük sağlayan önemli bir faktör olmuştur.

Yukarıda belirtilen şifreleri tasarlayanların yanı sıra bu şifrelerin zayıf yönlerini bulmaya çalışanlar da vardı. Anahtara sahip olmadan şifrelenmiş bir mesajı deşifre etme bilimi olan **kriptoanaliz**, ilkel şifrelerin kırılma çabalarıyla ortaya çıkmıştır. Bu basit şifre sistemlerini, olası tüm şifre alfabelerini denemeden daha kolay bir yolla çözebilmek için matematik, istatistik ve dil bilimi alanlarında yeterli bilgiye sahip olmak gerekiyordu. Abbasi döneminin yaşandığı yıllarda Araplar, birçok bilim alanında ileri seviyedeydi. Aynı zamanda kriptoanaliz için gerekli olan matematik, istatistik ve dil bilimi alanlarında önemli çalışmalar yapıyorlardı. Bu bilim dallarının gelişmiş olması, kriptoanalizin Araplar tarafından bulunmasını sağladı ve bu alandaki ilk eserler Araplar tarafından yazıldı. Bunlardan ilki 9. yüzyılda yaşamış Arap filozofu El-Kindî'nin yazdığı "Kriptografik Mesajların Deşifresi" isimli yazıdır.

El-Kindî'nin bu yazısı İstanbul'da, Süleymaniye Osmanlı Arşivinde bulunmaktadır ve kriptoanaliz üzerine yazılmış ilk makale olup El-Kindî bu makalede frekans analizi kavramını ortaya atmıştır. Frekans analizi bir dildeki harflerin tekrarlanma oranının hesaplanmasına dayanır. El-Kindî'nin kriptoanaliz tekniği şöyle özetlenebilir:
Yazıldığı dil bilinen şifreli bir mesajı çözmek için aynı dilde yazılmış yeterince uzun bir metin bulup her bir harfin kullanım sıklığını hesaplamak gereklidir. Metinde en sık kullanılan harf, şifreli mesajdaki en sık kullanılan harfe denk gelmektedir. Aynı işlem, sırasıyla diğer harfler için de yapılır. Bu işlem bittikten sonra mesajdaki harfler ortaya çıkmış olur. El-Kindî, bu kriptoanaliz yöntemine **frekans analizi** adını vermiştir. Bu adın verilmesinin sebebi ise bir dildeki her harfin bir kullanım sıklığının (frekans) olmasıdır. Bir harfin frekansı yeterince uzun metinler seçilerek bulunur ve frekans o harfin kaç kez kullanıldığının metindeki toplam harf sayısına bölümüdür. Bu sayı küçük sapmalar gösterebilir fakat harflerin frekanslarının kendi aralarındaki büyüklük sırası genellikle değişmez **(Çimen, 2009, s. 29-33; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Kindi.html).**

Düzenlenmiştir.

Düşünüyorum

Türk alfabesindeki her harfin sırasının değiştirilmesi ile tersten şifreleme yapılsın. Yani A harfi yerine Z harfi, B harfi yerine Y harfi kullanılsın. Örneğin MASA sözcüğü KZGZ şeklinde şifrelenir.
Siz de aşağıdaki ifadeyi yukarıdaki şifre çözme yöntemini kullanarak çözünüz.

PZBZEÖJ FOŞĞTGOJO KZETKZEOM ÜIATĞ



ALIŞTIRMALAR

1. Bir zar ile bir madenî paranın birlikte atılması deneyine ait iki farklı basit olay yazınız.

2. n tane madenî para atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı 4^4 olduğuna göre n değerini bulunuz.

3. 5 kız ve 4 erkekten oluşan bir gruptan 2 kişi seçilecektir. Buna göre

a) Örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

b) Seçilecek 2 kişinin 2 sinin de kız olması olayının eleman sayısını bulunuz.

c) Seçilecek 2 kişinin 2 sinin de erkek olması olayının eleman sayısını bulunuz.

4. Bir torbada kırmızı, mavi ve sarı bilyeler bulunmaktadır. Torbadan çekilen bir bilyenin mavi olması olayı ile sarı olması olayının ayrık olaylar olup olmadıklarını bulunuz.

5. A şehrinden B şehrine uğrayarak C şehrine gitmek isteyen birisi aşağıdaki bilgilere ulaşıyor.

I. A şehrinden B şehrine hava, kara ve demir yolu olmak üzere üç farklı seyahat seçeneği vardır.

II. B şehrinden C şehrine kara ve demir yolu olmak üzere iki farklı seyahat seçeneği vardır.

Hava yolu H, kara yolu K, demir yolu D olmak üzere

a) Bu kişinin seyahatinde tercih edebileceği tüm durumların kümesini (örnek uzayı) yazınız ve eleman sayısını bulunuz.

b) A olayı $A = \{(H, K), (K, D)\}$ olduğuna göre A' olayını yazınız.

c) Bu örnek uzaya ait bir C olayı için $s(C') = 1$ olduğuna göre s(C) nı bulunuz.

6. Bir raptiye atılması deneyinde raptiyenin dik gelmesi durumu ile yatık gelmesi durumunun eş olası durumlar olup olmadığını irdeleyiniz.

10.1.2.2. Olasılık Kavramı ile İlgili Uygulamalar



Bilgi

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı P(A) ile gösterilir. Buradan

$P(A) = \dfrac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \dfrac{s(A)}{s(E)}$ ile bulunur.

Bu durum eş olası olmayan olaylar için geçerli değildir.

Bir A olayının olma olasılığı en az 0, en çok 1 olur. $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.

Olasılığı 0 olan olaylara **imkânsız olay**, 1 olan olaylara **kesin olay** denir.



İpucu

Bir para atma deneyinde elde edilen basit olayların olasılıkları eşit ise bu para **hilesizdir** denir. Aynı durum zar atma deneyi için de geçerlidir.



Örnek 9



Hilesiz bir zarın havaya atılması deneyinde

a) Üst yüze gelen sayının 3 olma olasılığını bulunuz.
b) Üst yüze gelen sayının 4 olma olasılığını bulunuz.
c) Üst yüze gelen sayının 7 olma olasılığını bulunuz.
ç) Üst yüze gelen sayının 7 den küçük bir pozitif tam sayı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(E) = 6$ olur.

a) A olayı, zarın üst yüzüne 3 gelmesi ise $A = \{3\}$ ve $s(A) = 1$ olur. $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{1}{6}$ olur.

b) B olayı, zarın üst yüzüne 4 gelmesi ise $B = \{4\}$ ve $s(B) = 1$ olur. $P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)} = \dfrac{1}{6}$ olur.

c) Zarda üst yüze gelen sayının 7 olması olayı boş küme olduğundan imkânsız olaydır. Bu olayın olasılığı $\dfrac{s(\{\ \})}{s(E)} = \dfrac{0}{6} = 0$ olur.

ç) 7 den küçük pozitif tam sayı gelme olayı, C ise $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(C) = 6$ olur. $C = E$ olduğundan C olayı kesin olaydır ve $P(C) = \dfrac{s(C)}{s(E)} = \dfrac{6}{6} = 1$ olur.

Yukarıda verilen örnekteki hilesiz zar deneyinde her sayının gelme olasılığı eşit olduğundan $P(A) = P(B)$ olur. Buradan A ve B olayı için eş olası durum söz konusudur.



Örnek 10

Bir yüzeyi beyaz, iki yüzeyi mavi ve üç yüzeyi kırmızı olan bir zar atılıyor. Bu zar atma deneyi için

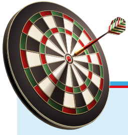
a) Üst yüze mavi gelmesi olasılığını bulunuz.
b) Üst yüze kırmızı gelmesi olasılığını bulunuz.



Çözüm

a) 6 yüzeyden 2 si mavi olduğundan üst yüze mavi gelme olasılığı $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ olur.

b) 6 yüzeyden 3 ü kırmızı olduğundan üst yüze kırmızı gelme olasılığı $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ olur.



Bilgi

- A ve B ayrık iki olay ise A veya B olayının olma olasılığı bu olayların olasılıkları toplamıdır.
  $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

- A ve B ayrık olmayan iki olay ise
  $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.



Örnek 11

Bir zar atma deneyinde asal sayı gelme olayı A, tek sayı gelme olayı B olsun. Buna göre A ve B olayı ile A veya B olaylarını bulunuz.



Çözüm

$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ olur.
"A ve B olayı" bir deneyde hem A hem de B olayının gerçekleşmesi olayıdır. Buradan
A ve B olayı, $A \cap B=\{2, 3, 5\} \cap \{1, 3, 5\}=\{3, 5\}$ olur.
"A veya B olayı" bir deneyde A olayı veya B olayının gerçekleşmesi olayıdır. Buradan
A veya B olayı, $A \cup B=\{2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 5\}=\{1, 2, 3, 5\}$ olur.



Örnek 12

Bir kutuda bulunan 10 özdeş toptan 2 si sarı, 3 ü mavi ve 5 i beyazdır. Bu kutudan rastgele alınan bir topun sarı veya beyaz olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Alınan topun sarı olması olayı S, beyaz olması olayı B ile gösterilsin. Bu top aynı anda hem sarı hem de beyaz olamayacağından bu olaylar ayrık olaylardır.

Bu kutudaki 10 toptan 2 si sarı olduğundan $P(S)=\frac{2}{10}$ ve 5 i beyaz olduğundan $P(B)=\frac{5}{10}$ olur.

Alınan topun sarı veya beyaz olma olasılığı ise

$P(\text{sarı veya beyaz}) = P(S \cup B) = P(S) + P(B) = \frac{2+5}{10} = \frac{7}{10}$ olur.



Örnek 13

35 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden 20 si kız öğrencidir. Kız öğrencilerin 12 si, erkek öğrencilerin 10 u matematik dersinden geçmiştir. Buna göre bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya matematikten kalan bir öğrenci olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Örnekteki veriler tablo hâlinde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

	Matematik dersinden geçen	Matematik dersinden kalan
Kız	**12**	**8**
Erkek	**10**	**5**

Tablo yardımıyla erkek olan veya matematik dersinden kalanların oluşturduğu kümenin eleman sayısının $10+5+8=23$ olduğu bulunur. Sınıf mevcudu 35 olduğundan bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya matematikten kalan bir öğrenci olma olasılığı $\frac{23}{35}$ olarak bulunur.



Örnek 14

$A=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2\}$ kümesinden rastgele seçilen iki sayının çarpımının pozitif bir sayı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

$A=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2\}$, $s(A)=5$ olur. A kümesinin tüm negatif elemanlarından oluşan küme B, tüm pozitif elemanlarından oluşan küme C olsun.
Buradan $B=\{-3,\ -2,-1\}$, $s(B)=3$ ve $C=\{1,\ 2\}$, $s(C)=2$ olur.

İstenen olay, "seçilen iki sayının çarpımının pozitif olması" dır. Bunun için B den veya C den ikişer eleman seçilmelidir. B den ve C den birer eleman seçerek oluşturulan kümenin elemanları çarpımı negatif olacağından istenen durum değildir. İstenen olayın eleman sayısı, B den veya C den ikişer eleman seçilmesi durumlarının sayısıdır.

$C(3,\ 2)+C(2,\ 2)=3+1=4$ seçilen iki sayının çarpımının pozitif olduğu durumların sayısıdır. Örnek uzayın eleman sayısı A kümesinin 2 elemanlı alt kümeleri sayısıdır. Bu alt kümeler $C(5,\ 2)=10$ tanedir. Böylece istenen olayın olasılığı $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ olur.



Örnek 15

2a14 rakamları birbirinden farklı dört basamaklı bir doğal sayıdır. Bu şartı sağlayan tüm 2a14 sayıları arasından rastgele seçilen bir sayının 3 ile tam bölünen bir sayı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Rakamları birbirinden farklı 2a14 şeklindeki dört basamaklı sayıların kümesi,
$E=\{2014,\ 2314,\ 2514,\ 2614,\ 2714,\ 2814,\ 2914\}$ ve $s(E)=7$ olur.
Rakamları toplamı 3 ün katı olan sayılar üç ile tam bölünmektedir. Bu durumu gösteren olaya A denilirse $A=\{2514,\ 2814\}$ ve $s(A)=2$ olup A olayının gerçekleşme olasılığı, $P(A)=\frac{2}{7}$ olur.



Örnek 16

122 333 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek oluşturulan 6 basamaklı farklı sayılardan herhangi biri seçiliyor. Seçilen sayının 122 333 olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

122 333 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek oluşturulan 6 basamaklı farklı sayılar $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}=60$ tane olduğundan örnek uzay 60 elemanlıdır. Bu sayılardan sadece 1 tanesi 122 333 şeklindedir. Bu olaya A denilirse $A=\{122\,333\}$ ve $s(A)=1$ olur. Bu durumda A olayının gerçekleşme olasılığı,

$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{1}{60}$ olur.



Örnek 17

$(x+y)^5$ açılımındaki terimlerden herhangi biri seçiliyor. Seçilen terimin katsayısının 10 dan küçük olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

Seçilecek katsayılar, açılımdaki terimlerin katsayıları olan

$\binom{5}{0}=1,\ \binom{5}{1}=5,\ \binom{5}{2}=10,\ \binom{5}{3}=10,\ \binom{5}{4}=5,\ \binom{5}{5}=1$ olduğundan bu katsayılar örnek uzayı oluşturur. Buradan örnek uzayın eleman sayısı 6 dır. Seçilen terimin katsayısının 10 dan küçük olması olayına ait elemanlar 1, 5, 5, 1 olmak üzere 4 tanedir. Bu durumda istenen olasılık,

$\frac{\text{İstenen olayın eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ olur.



İpucu

Örnek uzayın herhangi bir A olayının tümleyeni A' olmak üzere $P(A)+P(A')=1$ olur.



Örnek 18

Bir atıcının atış yaptığı bir hedefi vurma olasılığı $\frac{4}{5}$ tür. Atıcının bu hedefi vuramama olasılığının yüzde kaç olduğunu bulunuz.



Çözüm

Atıcının hedefi vurma olayına A denilirse vuramama olayı A' olacaktır. $P(A')=1-P(A)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ olur.

Buradan $\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$ olduğundan atıcının hedefi vuramama olasılığı %20 olur.



Örnek 19

Hileli bir madenî parada yazı gelme olasılığı tura gelme olasılığının 3 katıdır. Bu hileli parayı atma deneyinde yazı ve tura gelme olasılıklarını bulunuz.



Çözüm

Yazı gelme olayının olasılığına $P(Y)$, yazı gelme olayının tümleyeni olan tura gelme olayının olasılığına $P(T)$ denilirse $P(Y) = 3 \cdot P(T)$ olur. Bu durumda

$P(Y) + P(T) = 1 \Rightarrow 3 \cdot P(T) + P(T) = 1 \Rightarrow 4 \cdot P(T) = 1 \Rightarrow P(T) = \frac{1}{4}$ olur. Buradan $P(Y) = 3 \cdot P(T) = \frac{3}{4}$ olur.

Yazı ve tura gelme olasılıkları eşit olmadığından eş olası olmayan durum söz konusudur.



Örnek 20

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. $A \times A$ kümesinden rastgele seçilen bir sıralı ikilinin bileşenlerinin birbirinden farklı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) = 5 \cdot 5 = 25$ olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 25 tir.

$A \times A$ kümesinde birinci ve ikinci bileşeni aynı olan elemanlardan oluşan ikililerin kümesi B ile gösterilirse

$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ ve $s(B) = 5$ olur. Bu durumda bileşenlerin birbirinden farklı olma olayı B olayının tümleyenidir. Buradan

$P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{5}{25} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow P(B') = \frac{4}{5}$ olur.



Örnek 21

Bir torbadaki kırmızı, mavi ve sarı bilyelerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

I. Torbadan çekilen bir bilyenin mavi olması olasılığı $\frac{2}{5}$ dir.

II. Kırmızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşittir.

III. Torbadaki sarı bilye sayısı 1 ile 5 arasındadır.

Bu bilgilere göre

a) Torbada **en az** kaç mavi bilye olduğunu bulunuz.

b) Torbadaki mavi ve sarı bilye sayısı arasındaki farkın **en az** kaç olduğunu bulunuz.

c) Torbada **en çok** kaç bilye olduğunu bulunuz.



Çözüm

Kırmızı bilye sayısına k, mavi bilye sayısına m ve sarı bilye sayısına s denilirse toplam bilye sayısı $k + m + s$ dir. Kırmızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşit olduğundan $k = m + s$ olur.

a) Mavi bilye çekme olasılığı, $\frac{2}{5}$ olduğundan

$$\frac{m}{k+m+s} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{k+\underbrace{(m+s)}_{k}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{2k} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5m = 4k \text{ olur. Buradan}$$

$m = 4$ için $k = 5$ ve $s = 1$ olur. Fakat $1 < s < 5$ olduğundan $m = 4$ olamaz.

$m = 8$ için $k = 10$ ve $s = 2$ olur. $1 < 2 < 5$ olduğundan mavi bilye sayısı en az 8 dir.

b) Mavi bilye sayısı en az 8 olduğunda sarı bilye sayısı 2 dir. Dolayısıyla aradaki fark en az 6 dır.

c) $m = 16$ için $k = 20$ ve $s = 4$ olur. Buradan torbadaki bilye sayısı, en çok

$k + m + s = 16 + 20 + 4 = 40$ olur.



Örnek 22

6 madenî para aynı anda atılıyor. Bu paralardan **en az** birinin diğerlerinden farklı gelme olasılığını bulunuz.



Çözüm

6 madenî para atılması deneyinin örnek uzayının eleman sayısı $s(E) = 2^6 = 64$ olur.
6 sının da aynı gelme olayı, $A = \{(Y, Y, Y, Y, Y, Y), (T, T, T, T, T, T)\}$ ve $s(A) = 2$ olur.
6 sının da aynı gelmeme olayına A' denilirse

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{s(A)}{s(E)}$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - \frac{2}{64}$$
$$\Rightarrow P(A') = \frac{62}{64}$$
$$\Rightarrow P(A') = \frac{31}{32} \text{ olur.}$$



Örnek 23

İçinde yalnızca 4 sarı ve 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan rastgele seçilen 3 bilyeden **en az** birinin sarı olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Örnek uzayın eleman sayısı, 3 bilye çekme deneyinin çıkabilecek tüm sonuçlarının sayısı olan $\binom{9}{3} = 84$ olur. Tüm 3 bilye çekilmesi olayının eleman sayısından üçünün de kırmızı bilye çekilmesi olayının eleman sayısı çıkarılırsa elde edilen sayı, istenen olayın eleman sayısıdır.
3 bilyenin 3 ünün de kırmızı olması için kırmızı bilyeler arasından seçim yapılmıştır. Bu durumun eleman sayısı $\binom{5}{3} = 10$ olur. Bu durumda rastgele seçilen 3 bilyenin en az birinin sarı olma olasılığı,

$$\frac{\binom{9}{3} - \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{84 - 10}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42} \text{ olur.}$$



Örnek 24

$A = \{y, e, l, k, o, v, a, n\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümelerinden rastgele biri seçiliyor. Seçilen bu alt kümenin elemanlarından **en az** birinin sesli harf olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

En az bir sesli harf bulunan üç elemanlı alt kümelerin sayısı; bir tane sesli harf bulunduranlar, iki tane sesli harf bulunduranlar ve üç tane sesli harf bulunduranlar olarak hesaplanabilir. Bu işlemler yerine tüm üç elemanlı alt küme sayısından herhangi bir sesli harfin bulunmadığı üç elemanlı alt küme sayısı çıkarılırsa işlem daha kolay olacaktır.

Herhangi bir sesli harfin bulunmadığı üç elemanlı alt küme sayısı $\binom{5}{3} = 10$ olur.

A kümesinin üç elemanlı alt küme sayısı $\binom{8}{3} = 56$ olur.

Dolayısıyla istenen durumun olasılık değeri $\frac{56 - 10}{56} = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. Bir zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı veya tek sayı olması olasılığını bulunuz.

2. 20 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 9 u erkektir. Bu sınıfta erkeklerin 2 si, kızların ise 4 ü esmerdir. Sınıftan rastgele seçilen birinin kız veya esmer olması olasılığını bulunuz.

3. 30 kişilik bir grupta futbol oynayan 15, basketbol oynayan 10 ve her ikisini de oynayan 6 kişidir. Bu gruptan rastgele seçilen birinin futbol veya basketbol oynama olasılığını bulunuz.

4. Bir vazoda 6 tane beyaz ve x tane kırmızı gül vardır. Vazodan bir kırmızı gül çekilme olasılığı $\frac{2}{3}$ ise x değerini bulunuz.

5. Bir zar atıldığında **görülebilen yüzeylerine** 1 veya 2 sayısının gelme olasılığını bulunuz.

6. İki zar birlikte atıldığında üst yüze gelen sayılar toplamının

a) 6 olma olasılığını bulunuz.

b) En az 6 olma olasılığını bulunuz.

c) 4 olmama olasılığını bulunuz.

7. n tane madenî paranın atılması deneyinde hepsinin aynı gelmeme olasılığı $\frac{127}{128}$ ise n değerini bulunuz.

8. 3 doktor, 2 hemşire arasından iki kişilik bir sağlık ekibi kurulacaktır. Bu ekipte **en az** bir doktorun bulunma olasılığını bulunuz.

9. $A = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ kümesinin elemanlarından rastgele seçilen iki sayının çarpım sonucunun bir çift sayı olması olasılığını bulunuz.

10. $(m+n)^7$ açılımındaki terimlerden herhangi biri seçiliyor. Seçilen terimin katsayısının 7 den büyük bir sayı olma olasılığını bulunuz.

Tümleyen Olay, Ayrık Olaylar ve Ayrık Olmayan Olaylar ile İlgili Olasılık Uygulamaları



Örnek 25

A, B, C ikişer ikişer ayrık olayları E örnek uzayının alt kümeleridir.
$E = A \cup B \cup C$, $P(A) + P(C) = \frac{2}{7}$, $P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$ olduğuna göre P(A) değerini bulunuz.



Çözüm

$P(A) + P(C) = \frac{2}{7}$

$P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A) + P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{4}$,

A, B, C olayları ayrık olduğundan $A \cup B \cup C$ olayının olasılığı 1 dir. $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$P(A) + 1 = \frac{29}{28} \Rightarrow P(A) = \frac{29}{28} - 1 = \frac{1}{28}$ olur.



Örnek 26

A ve B aynı örnek uzaya ait ayrık iki olaydır. $P(A' \cap B') = \frac{1}{6}$ ve $P(A) = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $P(B)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = \frac{1}{6}$ (De Morgan kuralından)
$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ olur. A ve B ayrık olaylar olduğundan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur. Buradan
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ olur.



Örnek 27

ALADAĞLAR kelimesinin harflerinden rastgele seçilen bir harfin A veya L olması olasılığını bulunuz.



Çözüm

1. yol
Seçilen harfin A olması olasılığı $P(A)$ ile, seçilen harfin L olması olasılığı $P(L)$ ile gösterilsin. Bir harf aynı anda hem A hem L olamayacağından bu olaylar ayrık olaylardır.
ALADAĞLAR kelimesinin 9 harfinden 4 ü A harfi olduğu için $P(A) = \frac{4}{9}$, 2 si L olduğu için $P(L) = \frac{2}{9}$ olur.
$P(A \text{ veya } L) = P(A) + P(L) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ olur.

2. yol
Bu deneyde seçilebilecek 9 harf olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 9 dur. Seçilen harfin A veya L olması olayı içinde 4 tane A ve 2 tane L vardır. Yani seçilen olayın eleman sayısı 6 dır. Buna göre A veya L olayının olasılığı $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ olur.



Örnek 28



Anne, baba ve 3 çocuğu yan yana rastgele oturarak fotoğraf çekti- receklerdir. Çekilen fotoğrafta anne ile babanın yan yana **olmama** olasılığını bulunuz.



Çözüm

Toplam 5 kişinin sıralanma sayısı $5! = 120$ olduğundan örnek uzayın eleman sayısı 120 dir.
Anne ile babanın yan yana olduğu düşünülsün. Bu durumda anne ile baba 1 kişi gibi düşünülerek 3 ço- cukla birlikte toplamda 4 kişi varmış gibi işlem yapılabilir ve tüm sıralanma sayısı $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$ olur.
48 durumda anne ile baba yan yana ise $120 - 48 = 72$ durumda anne ile baba yan yana değildir. Bu durumda çekilen fotoğrafta anne ile babanın yan yana olmama olasılığı $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. Bir torbada bulunan 2 farklı sarı, 3 farklı kırmızı ve 4 farklı mavi boncuk arasından rastgele biri çekiliyor. Çekilen boncuğun sarı **olmama** olasılığını bulunuz.

2. Bir torbada 1 den 10 a kadar numaralandırılmış 10 top vardır. Buna göre bu torbadan çekilen bir topun numarasının tek veya 4 ten küçük bir sayı olma olasılığını bulunuz.

3. 4 madenî para birlikte atılıyor. Madenî paralardan **en az** birinin yazı gelme olasılığını bulunuz.

4. 24 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta 10 kız öğrenciden 3 ü yeşil, 7 si kahverengi gözlü; 14 erkek öğrenciden 4 ü yeşil, 10 u kahverengi gözlüdür. Buna göre bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız veya yeşil gözlü olması olasılığını bulunuz.

5. Bir örnek uzayın ikişer ikişer ayrık olayları A, B ve C dir. E bu deneye ait örnek uzay olmak üzere $E = A \cup B \cup C$ ve
$P(B) + P(C) = \frac{2}{5}$ olduğuna göre
$P(B') + P(C')$ değerini bulunuz.

6. 12a6 rakamları birbirinden farklı dört basamaklı bir doğal sayıdır. Bu şartı sağlayan tüm 12a6 sayıları arasından rastgele seçilen bir sayının 4 ile tam bölünen bir sayı **olmama** olasılığını bulunuz.

7. Beyza, marketten rastgele bir şişe su alacaktır. Marketteki bir rafta 18 tane A, 12 tane B ve 15 tane C marka su şişesi vardır. Beyza'nın A veya B marka su şişesinden alma olasılığını bulunuz.

8. 112 234 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilen 6 basamaklı, farklı sayılardan rastgele biri seçiliyor. Bu sayıda 1 rakamlarının yan yana olma olasılığını bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru sayıyı yazınız.

1. 3 farklı roman ve 5 farklı şiir kitabı arasından 1 adet roman veya şiir kitabı ...... farklı şekilde seçilebilir.

2. 3 farklı roman ve 5 farklı şiir kitabı arasından 1 roman ve 1 şiir kitabı ...... farklı şekilde seçilebilir.

3. 3 farklı kitap düz bir rafa .... farklı şekilde dizilebilir.

4. 123 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek .... farklı sayı elde edilebilir.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen matematiksel ifadeleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

5. $(n \in \mathbb{N})$

1. $P(n, 0)$
2. $P(n, 1)$
3. $P(7, 1)$
4. $P(5, 1)$

a) 1
b) n
c) n!
ç) n^2
d) 7
e) 5
f) 0

1.	2.	3.	4.

6. $(n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r)$.

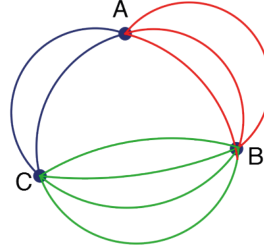
1. $P(n, r)$
2. $P(n, n)$
3. $P(5, 2)$
4. $0!$

a) 20
b) 1
c) n!
ç) P(5, 3)
d) $\dfrac{n!}{(n-r)!}$
e) $\dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların cevabını ilgili alana yazınız.

7.



Şekildeki her çizgi şehirler arası bir yolu temsil etmektedir. A kentinden B kentine 3 farklı yol, B kentinden C kentine 4 farklı yol, A kentinden C kentine 2 farklı yol vardır. Buna göre iki şehir arasındaki herhangi bir yol kullanıldığında o şehirler arasındaki hiçbir yolun bir daha kullanılmaması şartıyla A kentinden C kentine kaç farklı yoldan gidilebileceğini bulunuz.

8. $\dfrac{(n+3)! - 10 \cdot (n+1)!}{(n+2)!} = n+1$

denklemini sağlayan n değerini bulunuz.

9. 3 farklı matematik, 4 farklı fizik ve 2 farklı kimya kitabı düz bir rafa dizilecektir. Fizik kitapları yan yana ve kimya kitapları yan yana olmak üzere 9 kitabın bu rafa kaç değişik şekilde dizilebileceğini bulunuz.

10 -12. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

MENÜ

KEBAPLAR

Adana Kebabı .... 15 TL
Urfa Kebabı .... 14 TL
Testi Kebabı .... 15,5 TL
Cağ Kebabı .... 14,5 TL

ÇORBALAR

Mercimek .... 5 TL
Ezo Gelin .... 6 TL
Domates .... 5,5 TL

TATLILAR

Baklava .... 7 TL
Künefe .... 9 TL
Kemalpaşa .... 7 TL

Ali, Ayşe ve Ahmet bir kutlama yemeği için restorana gidiyorlar. Verilen menüden aşağıda verilen bilgilere göre sipariş veriyorlar.

- Herkes kebap, çorba ve tatlı çeşitlerinden birer tane sipariş veriyor.
- Ali, Ayşe ve Ahmet'in siparişlerinde ortak hiçbir yemek yoktur.
- Herkes kendi hesabını ödüyor.

10. Siparişi ilk veren Ali'nin kaç farklı seçeneği olduğunu bulunuz.

11. Ali'nin yemek siparişi Adana kebabı, Ezo Gelin çorbası ve baklava olduğuna göre Ayşe'nin yemek siparişinin kaç farklı şekilde olabileceğini bulunuz.

12. Ahmet en az hesap ödeyecek şekilde sipariş verdiğine göre Ahmet'in kaç farklı sipariş seçeneği olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

13. $\frac{a!}{b!} = 72$ eşitliğini sağlayan a ve b pozitif tam sayılarının toplamının alabileceği **en küçük** değer kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 142 D) 143 E) 144

14. $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı, rakamları farklı, 600 den küçük kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

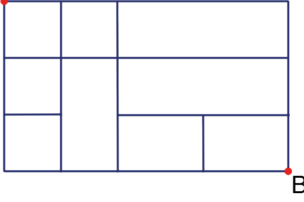
A) 48 B) 36 C) 32 D) 24 E) 18

15. 13 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 66 B) 132 C) 156 D) 164 E) 189

16. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı, rakamları farklı, 3 ile tam bölünen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

17. 

Yukarıdaki şekilde verilen çizgiler üzerinden sadece sağa veya aşağıya hareket edilerek A noktasından B noktasına kaç farklı yoldan gidilebilir?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

18. a, b, c, d, e, f harflerinin tamamı birer kez kullanılarak yan yana oluşturulan sıralamalarının soldan sağa okunuşlarının kaçında a harfi e harfinden önce gelir?

A) 90 B) 120 C) 180 D) 360 E) 720

19. $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak rakamları farklı, 4 basamaklı, 4 ile tam bölünen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 36

20. 6 kız, 4 erkek öğrenci yan yana sıralanacaktır. Bu öğrenciler, başa ve sona birer kız öğrenci gelmesi ve erkek öğrencilerin birbirinden **ayrılmaması** koşuluyla kaç farklı biçimde sıralanabilirler?

A) $4! \cdot 5!$ B) $4! \cdot 6!$ C) $6! \cdot 5!$ D) $6! \cdot 6!$ E) $6 \cdot 6!$

21. MENEMEN kelimesinin harfleri yer değiştirilerek elde edilen 7 harfli kelimelerin soldan sağa okunuşunun kaçında M harfinden hemen sonra E harfi gelir?

A) 30 B) 60 C) 90 D) 120 E) 150

22. TAKATUKA kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek T ile başlayan fakat U ile bitmeyen 8 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

A) 260 B) 360 C) 420 D) 440 E) 460

23. 9 998 870 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek birbirinden farklı, 7 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

A) 160 B) 480 C) 540 D) 600 E) 660

24. Hediyelik eşya satan bir mağazada, alınan bir hediyeyi paketlemek için 3 farklı desende hediye paketi ve bu paketlere yapıştırılmak üzere 2 farklı renkte kurdele vardır. Bu mağazadan 2 farklı hediye alan bir müşteri, bu hediyeleri kaç farklı şekilde paketlettirip üzerlerine kurdele yapıştırtabilir?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 36 E) 48

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları, faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru sayıyı yazınız.

1. 5 öğrenci arasından 2 öğrenci ...... farklı şekilde seçilebilir.

2. 20 farklı kitap arasından 19 farklı kitap ...... farklı şekilde seçilebilir.

3. 6 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı .... tir.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen matematiksel ifadeleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

4.

1. $C(6,0)$
2. $C(5,3)$
3. $C(12,11)$
4. $C(20,1)$

a) 0
b) 10
c) 5
ç) 1
d) 20
e) 12
f) 11

1.	2.	3.	4.

5. $(n,\ r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r)$.

1. $\binom{n}{0}$
2. $\binom{n}{n-2}$
3. $\binom{n}{r}$
4. $\binom{n}{1}$

a) n
b) $\frac{n!}{(n-r)!}$
c) 1
ç) $\binom{n}{2}$
d) $\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$
e) 0

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların cevabını ilgili alana yazınız.

6. $A = \{x \mid x$ bir rakamdır$\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaçının elemanları çarpımının tek sayı olduğunu bulunuz.

7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre açıldığında ortadaki terimi bulunuz.

8. $C(n+1,\ n-1) - 6 = C(n,\ n-2)$ olduğuna göre n ifadesinin değerini bulunuz.

9. Çanakkale Şehitliği'ne gezi düzenleyen 20 kişilik bir öğrenci grubundan 3 kişi Şehitler Anıtı'na çelenk koymak üzere seçilecektir. Çelenk koyacak 1 öğrenci belli olduğuna göre bu öğrencilerin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

10-12. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri veriliyor.

10. A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinde 1 ve 2 elemanlarının birlikte bulunduğu kümelerin sayısını bulunuz.

11. A ve B kümelerinden ikişer eleman alınarak 4 haneli şifreler oluşturuluyor. Buna göre harf ile başlayıp harf ile biten kaç şifre oluşturulduğunu bulunuz.

12. A ve B kümelerini kapsayan kümelerden eleman sayısı en az olan kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde **en az** bir harfin bulunduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

13. Herkesin yalnız bir spor dalıyla ilgilendiği bir kafilede 5 futbolcu, 6 voleybolcu ve 7 basketbolcu vardır. Bu sporcu kafilesinden 1 futbolcu, 2 voleybolcu ve 3 basketbolcudan oluşan bir ekip kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

A) 1375 B) 2420 C) 2500 D) 2575 E) 2625

14. Aralarında Eyüp ve Adem'in de bulunduğu 8 kişilik bir gruptan 3 ve 5 kişilik iki ekip kurulacaktır. Eyüp ve Adem'in ikisinin de aynı ekipte olması koşuluyla kaç farklı ekip oluşturulabilir?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

15. $(x-5)^3 \cdot (x+2)^4$ ifadesinin açılımından elde edilen x^5 li terimin katsayısı kaçtır?

A) -171 B) -151 C) -21 D) 21 E) 219

16. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^4$ ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

A) 48 B) 42 C) 36 D) 24 E) 18

17. $(x^3 + 2y)^n = ... + a \cdot x^9 \cdot y^4 + ...$ açılımındaki a gerçek sayısının değeri kaçtır?

A) 500 B) 560 C) 660 D) 700 E) 720

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları, faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi ya da sayıyı yazınız.

1. Ortak elemanları olmayan kümeler ile temsil edilen olaylara .... olaylar denir.

2. Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin .... denir.

3. Olasılığı 0 olan olaylara .... olay, 1 olan olaylara .... olay denir.

4. 5 madenî para atılması deneyinde .... tane olay vardır.

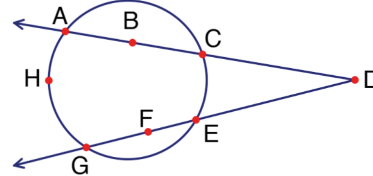
B) Aşağıdaki açık uçlu soruların cevabını ilgili alana yazınız.

5. 4 madenî para birlikte atıldığında üçünün yazı, birinin tura gelme olasılığını bulunuz.

6. Aralarında Yasin ve Mete'nin bulunduğu 6 kişi yan yana rastgele sıralanıyor. Yasin ve Mete'nin yan yana olma olasılığını bulunuz.

7. İçinde yalnız kırmızı ve beyaz bilyelerin bulunduğu bir torbadaki kırmızı bilyelerin sayısı beyaz bilyelerin sayısının iki katıdır. Torbadan rastgele çekilen iki bilyenin ikisinin de beyaz olma olasılığı $\frac{1}{12}$ olduğuna göre başlangıçta torbada toplam kaç bilye olduğunu bulunuz.

8-10. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



Yukarıdaki şekilde 5 i çember üzerinde olmak üzere 8 nokta verilmiştir.

8. Şekildeki 8 noktadan rastgele 3 ü şeçildiğinde seçilen noktaların bir üçgenin köşeleri olma olasılığını bulunuz.

9. Şekildeki 8 noktadan rastgele 2 si şeçildiğinde seçilen noktalardan **en az** birinin çember üzerinde olma olasılığını bulunuz.

10. Şekildeki 8 noktadan rastgele 4 ü şeçildiğinde seçilen noktaların bir dörtgenin köşeleri olma olasılığını bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

11. İki zar birlikte atıldığında zarların üst yüzüne gelen sayılar arasındaki farkın mutlak değerinin 1 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{5}{36}$ E) $\frac{5}{18}$

12. 5 elemanlı bir kümenin alt kümelerinden seçilen bir kümenin **en çok** iki elemanlı bir küme olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

13. 5 doğru parçasının uzunlukları 2, 4, 6, 8 ve 10 cm dir. Bu beş doğru parçasından rastgele seçilen üçünün bir üçgenin kenarları olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

14. $A = \{x \mid 1 < x < 6,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan üç basamaklı, rakamları farklı sayılar birer kâğıda yazılıp bir torbaya atılıyor. Torbadan rastgele çekilen bir kâğıtta yazan sayının $a < b < c$ koşulunu sağlayan abc şeklinde, üç basamaklı bir tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{5}{24}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{5}{12}$

15. $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulabilecek 4 basamaklı, rakamları farklı doğal sayılar arasından rastgele seçilen bir sayının tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{20}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{25}$

16. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesinin elemanlarından rastgele ikisi seçiliyor. Seçilen bu elemanların toplamının negatif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{11}{15}$

17. $K = \{x \mid -2 < x < 5,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin alt kümelerinden biri rastgele seçiliyor. Seçilen bu alt kümenin **en az** 3, **en çok** 4 elemanlı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{15}{64}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{35}{64}$ D) $\frac{7}{32}$ E) $\frac{5}{8}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları, faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



SAYILAR VE CEBİR

2







FONKSİYONLAR

10.2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi
10.2.2. İki Fonksiyonunun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi

10.2. FONKSİYONLAR



Hazırlık Çalışması

1. $(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), ...$ yandaki sıralı ikililerin birinci ve ikinci bileşenleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

2. Bir aracın ortalama hızı 60 km/sa. tir. Buna göre bu aracın hareketinden herhangi bir saat sonra toplam kaç kilometre yol aldığını veren yol-zaman formülü oluşturunuz.

3. Bilgi: Birbirini çeviren iki çarkın dönme sayısı diş sayısı ile ters orantılıdır.
Birbirini çeviren iki çarktan büyük çarkın diş sayısı küçük çarkın diş sayısının 4 katıdır. Buna göre büyük çarkın dönme sayısı x olmak üzere küçük çarkın dönme sayısını veren formülü bulunuz.









Hayat dikkatle gözlemlendiğinde konu ile ilgili bilgi doğrultusunda yaşanan her algının beyinlerde bir çıktısı olduğu görülür.

Sınıf ortamında $3 \cdot 5$ işlemi duyulduğunda öğrencilerin beyninde birtakım simgeler belirir. Geçmişte öğrenilen bilgiler doğrultusunda akıllarında 15 sayısı veya farklı bir sonuç oluşur.

Cep telefonunun tuş kilidi açıldığında ekrandaki menüde yapılmak istenen işlemlerden biri seçilir. Seçilen tuşa dokunulduğunda ilgili bölüm gelir. Tuşa dokunulduğunda ilgili bölümünün gelmesi bu telefonun bir fonksiyonudur, denir.

Göz kontrolü için doktora gidildiğinde göz doktoru, farklı büyüklükte harflerin olduğu bir tablo göstererek bunlardan bazılarının okunmasını ister. Bu harfler okunurken göze gelen ışık beyne görüntü olarak iletilir. Işığın görüntüye dönüştürülmesi gözün bir fonksiyonudur.

Bir çiftçi tarafından tarlaya buğday ekilir. Uygun iklim şartlarında, düzenli bir bakımla hasat mevsimi geldiğinde tarladan aynı cins buğday elde edilir. Burada tarla bir dönüştürücüdür. Üretilen buğday fabrikaya götürülür. Fabrika ileri teknoloji ile donatılmışsa sistem, bilgisayara bağlıdır. Burada gerekli işlemlerden geçirildikten sonra buğdaydan ekmeklik un veya sofralık bulgur elde edilmek isteniyorsa sistemde istenilen dönüşümü (fonksiyonu) gerçekleştirmek için ilgili tuşa basılır. Buğdayın ilgili birimin paketleme bölümünden istendiği şekilde çıkması fabrikanın dönüştürme (fonksiyon) birimlerinin doğru çalıştığını gösterir.

Yukarıda sayılan ve çevrede görülen birçok şey bir fonksiyondur. Matematikte **fonksiyon** tıpkı günlük hayatta gözlemlenen olay ve sonuçlar gibi bilimsel bir kurala göre girdi ve çıktılardan oluşan bir dönüştürücüdür.

10.2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

Terimler ve Kavramlar

- Fonksiyon
- Tanım Kümesi
- Değer Kümesi
- Görüntü Kümesi
- Fonksiyonun Grafiği
- Sabit Fonksiyon
- İçine Fonksiyon
- Örten Fonksiyon
- Bire Bir Fonksiyon
- Eşit Fonksiyon
- Birim Fonksiyon
- Doğrusal Fonksiyon
- Tek Fonksiyon
- Çift Fonksiyon
- Dikey (Düşey) Doğru Testi

Sembol ve Gösterimler

- $f: A \to B$, $f(A)$, $y = f(x)$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, I



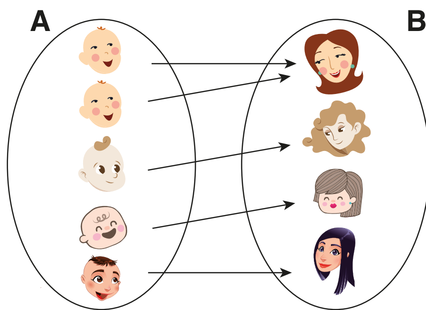
Neler Öğreneceksiniz?

- Fonksiyonlarla ilgili problemler çözebilmeyi,
- Fonksiyonların grafiklerini çizebilmeyi,
- Fonksiyonların grafiklerini yorumlayabilmeyi,
- Gerçek hayat durumlarından doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilenlerin grafik gösterimlerini yapabilmeyi öğreneceksiniz.

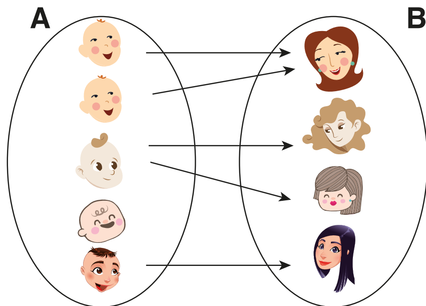
10.2.1.1. Fonksiyonlarla İlgili Problemler

Doğum için bir hastanenin ameliyathanesine aynı anda alınan 4 anne adayının tamamı sağlıklı birer doğum gerçekleştirmiştir. Anne adaylarından birinin ikiz bebeği, diğer üçünün ise birer bebeği dünyaya gelmiştir. Hemşire, bebekleri yeni doğan servisine götürerek kontrollerini yaptırdıktan sonra kıyafetlerini giydirip annelerine teslim etmektedir. Her bebeğin annesine teslim edilmesi ve serviste teslim edilmeyen bebeğin kalmaması gerekmektedir.

Bebeklerin oluşturduğu küme A, annelerin oluşturduğu küme B kümesi olmak üzere bebeklerin annelerine teslim edilmesi ile ilgili aşağıda verilen eşleştirmeleri inceleyiniz.



Yandaki eşleştirmede bebeklerin her birini hemşirenin kendi annesine teslim ettiği görülmektedir. Annesine teslim edilmeyen bebeğin kalmaması ve her bebeğin annesine teslim edilmesi sebebiyle yapılan bu eşleştirme doğru bir eşleştirme örneğidir (Bir annenin ikiz bebeği olduğundan ikiz bebeklerin her ikisinin de kendi annelerine götürüldüğüne dikkat ediniz.). Yandaki şekilde yapılan eşleştirme, bu bölümde öğrenilecek fonksiyon konusu için bir örnek model oluşturmaktadır.



Yandaki eşleştirmede hemşirenin bebeklerden birini farklı iki anneye teslim etmesinin mümkün olmaması ve bebeklerden birini annesine teslim etmemesi doğru bir eşleştirme örneği değildir.
Yandaki şekilde yapılan eşleştirme bu bölümde öğrenilecek fonksiyon konusu için bir örnek model oluşturmamaktadır.

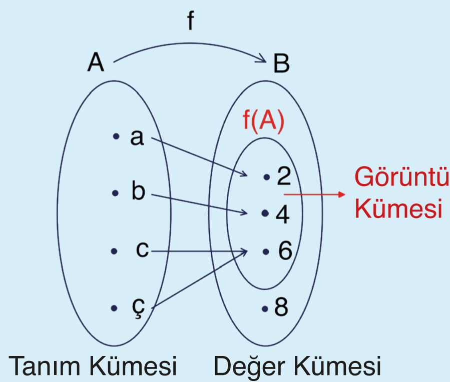


Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f, h, g gibi sembollerle gösterilir.

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f: A \to B$ ile gösterilir. A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** denir. A dan A ya tanımlı bir fonksiyona kısaca **A da tanımlı fonksiyon** da denilebilir. f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını B kümesindeki bir y elemanı ile eşliyor ise **x elemanının f altındaki görüntüsü y elemanıdır** denir. Bu durum $y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

$f: A \to B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **bu fonksiyonun görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemi ile $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ olarak ifade edilir.



Örneğin yanda verilen şekilde,

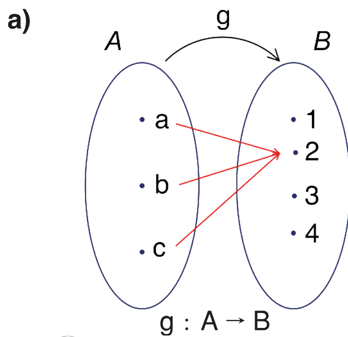
- Tanım kümesinde boşta kalan herhangi bir eleman olmadığından ve tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yalnız bir elemanla eşlendiğinden f bir fonksiyondur.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c, ç\}$, değer kümesi $B = \{2, 4, 6, 8\}$, görüntü kümesi $f(A) = \{2, 4, 6\}$ ve $f(A) \subseteq B$ olur.
- a elemanının f altındaki görüntüsü 2 olup $f(a) = 2$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $f(b) = 4$, $f(c) = 6$ ve $f(ç) = 6$ olur.
- f fonksiyonu sıralı ikililer kullanılarak $f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 6), (ç, 6)\}$ biçiminde de gösterilebilir.



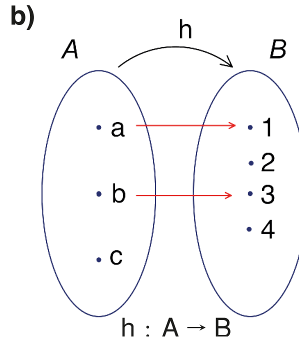
Örnek 1

Aşağıdaki Venn şemaları ile verilen ifadelerden hangilerinin fonksiyon olduğunu bulunuz.

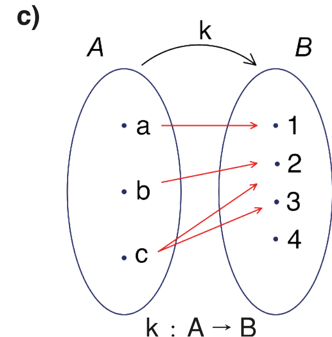
a)



b)



c)





Çözüm

a) g, tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemanla eşleştirdiği için fonksiyondur.

b) h, tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde herhangi bir elemanla eşleştirmediği için **fonksiyon değildir**.

c) k, tanım kümesindeki c elemanını değer kümesinde iki elemanla eşleştirdiği için **fonksiyon değildir**.



Örnek 2

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin A kümesinden B kümesine bir fonksiyon belirttiğini bulunuz.

a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ **b)** $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ **c)** $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$



Çözüm

a) $f = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki tüm elemanlar birer defa eşlendiği için f bir fonksiyondur.

b) $g = \{(1, x), (2, y), (4, z)\}$ ifadesinde tanım kümesindeki 3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediği için g bir **fonksiyon değildir**.

c) $h = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$ ifadesinde B kümesindeki elemanlar A kümesindeki elemanlar ile eşleştiği için h, A dan B ye bir **fonksiyon değildir**.



Örnek 3

Esra ve Derya, küçük kardeşleri Uğur'un birden beşe kadar saymayı öğrendiğini gördüklerinde ona yeni sayılar öğretmek amacıyla aşağıdaki kurallara göre bir oyun oynamaya karar veriyorlar.

- Uğur, ablası Esra'nın kulağına bildiği sayılardan birini söyleyecektir.
- Esra, kardeşinin söylediği sayının iki katını ablası Derya'nın kulağına söyleyecektir.
- Derya ise Esra'nın söylediği sayının üç fazlasını yüksek sesle duyuracaktır ve böylelikle Uğur'un söylediği sayının dönüşümü tamamlanacaktır.
- Bu oyun Uğur'un bildiği tüm sayıların dönüşümü tamamlanana kadar sürecektir.

Buna göre bu kardeşlerin oynadığı oyunun kuralını bir fonksiyon şeklinde yazarak bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.



Çözüm

Uğur'un ablası Esra'ya söylediği sayı x olmak üzere Esra'nın Derya'ya söylediği sayı 2x ve Derya'nın duyurduğu sayı $2x+3$ olur. Böylelikle x sayısına karşılık $2x+3$ sayısı oluşur. Bu oyunun kuralı $f(x) = y$ olacak şekilde $f(x) = 2x+3$ eşleştirme kuralı ile ifade edilebilir ve $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$ olur. Bu fonksiyondaki sıralı ikililerin birinci bileşenleri Uğur'un bildiği sayılar kümesi olan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ olup bu küme fonksiyonun tanım kümesidir. Bu fonksiyondaki sıralı ikililerin ikinci bileşenleri ise Uğur'un bildiği sayılara karşılık oyunun sonunda oluşan yeni sayılardır ve bu sayılar görüntü kümesini oluşturur. Buna göre bu fonksiyonun görüntü kümesi $\{5, 7, 9, 11, 13\}$ olur.



Örnek 4

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen ifadelerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x^2+2}$ **b)** $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sqrt{5-x} + 3x - 1$



Çözüm

a) f fonksiyonunun tanım kümesinden alınan her x gerçek sayısı için $x^2+2 \geq 0$ ve $\sqrt{x^2+2}$ ifadesi bir gerçek sayıdır. Dolayısıyla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x^2+2}$ ifadesi bir fonksiyon belirtir.

b) g fonksiyonunun tanım kümesindeki bazı değerler için $\sqrt{5-x}$ ifadesinin bir gerçek sayı olmadığı görülür. Örneğin $x = 6$ için $\sqrt{5-6} = \sqrt{-1}$ sayısı bir gerçek sayı değildir. Buna göre $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sqrt{5-x} + 3x - 1$ ifadesi bir **fonksiyon değildir**.



Örnek 5

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen ifadelerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ h(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$



Çözüm

a) Tanım kümesindeki $-3 \in \mathbb{R}$ için $f(-3) = \dfrac{2\cdot(-3)+1}{-3+3} = \dfrac{-5}{0} \notin \mathbb{R}$ olduğundan -3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediğinden f **fonksiyon değildir**.

b) Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde herhangi bir elemanla eşleşeceğinden ve hiçbir eleman açıkta kalmayacağından g bir fonksiyondur.

c) Tanım kümesindeki $3 \in \mathbb{N}$ için $h(3) = \dfrac{2\cdot(3)+1}{3+3} = \dfrac{7}{6} \notin \mathbb{N}$ olduğundan 3 elemanı değer kümesindeki herhangi bir elemanla eşleşmediğinden h **fonksiyon değildir**.



Örnek 6

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm

A kümesinin her elemanının f fonksiyonundaki görüntüsü f(A) yı vereceğinden A kümesinin her elemanı f fonksiyonunda x yerine yazılırsa

$f(-1) = 2\cdot(-1) - 1 = -3$,

$f(0) = 2\cdot(0) - 1 = -1$,

$f(1) = 2\cdot(1) - 1 = 1$,

$f(2) = 2\cdot(2) - 1 = 3$ bulunur. Buradan görüntü kümesi, $f(A) = \{-3, -1, 1, 3\}$ olur.



Örnek 7

$f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x + 6$ fonksiyonunda $f(A) = \{-10, 18, 22\}$ olduğuna göre f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.



Çözüm

$f(A)$ görüntü kümesi tanım kümesindeki her elemanın f fonksiyonu altındaki görüntüsü olduğundan görüntü kümesindeki her bir elemanın f foksiyonuna eşitlenmesiyle bulunan x değerleri tanım kümesinin birer elemanı olacaktır.

$4x + 6 = -10 \Rightarrow 4x = -16 \Rightarrow x = -4$,

$4x + 6 = 18 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$,

$4x + 6 = 22 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$ olur. Buradan tanım kümesi, $A = \{-4, 3, 4\}$ bulunur.



Örnek 8

$f:(-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2x - 7$ olduğuna göre f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm

$x \in (-2, 1)$ olduğundan $-2 < x < 1$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesi 2 ile çarpılırsa $-4 < 2x < 2$ olur. Her bölgeye -7 eklenirse $-11 < 2x - 7 < -5$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-11, -5)$ olarak bulunur.



Örnek 9

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x - 3$ ve $f(A) = (-1, 3]$ olduğuna göre A kümesini bulunuz.



Çözüm

$f(x) \in (-1, 3]$ olduğundan $-1 < 2x - 3 \leq 3$ olur. Buradan eşitsizliğin her bölgesine 3 eklenip her bölgesi $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa $1 < x \leq 3$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi $A = (1, 3]$ olarak bulunur.



Örnek 10

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x^2 + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $h(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$h(5)$, 5 in h fonksiyonundaki görüntüsü olduğundan h fonksiyonunda x yerine 5 yazılırsa
$h(5) = 3 \cdot 5^2 + 5 = 3 \cdot 25 + 5 = 80$ olur.



Örnek 11

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+3) = 2x - 4$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(4)$ değerini bulunuz.



Çözüm

4 ün f fonksiyonu altındaki görüntüsü sorulduğundan $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$ olur.
Bu değer f fonksiyonunda x yerine yazılırsa
$f(1+3) = 2 \cdot 1 - 4$ ise $f(4) = -2$ olur.



Örnek 12

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ fonksiyonu için $f(x+1)$ ifadesinin eşitini bulunuz.



Çözüm

$x + 1$ in f fonksiyonundaki görüntüsü için f fonksiyonunda x yerine $x + 1$ yazılırsa
$f(x+1) = 3 \cdot (x+1) + 2 = 3x + 3 + 2 \Rightarrow f(x+1) = 3x + 5$ olur.



Örnek 13

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x-4) = 7x+5$ fonksiyonu için

a) $f(x)$ fonksiyonunun eşleştirme kuralını bulunuz.

b) $f(x+2)$ fonksiyonunun eşleştirme kuralını bulunuz.



Çözüm

$f(x-4) = f(A)$ olsun. Bu ifadede $x-4 = A \Rightarrow x = A+4$ olur.
Bu değer $f(x-4)$ fonksiyonunda her x yerine yazılırsa
$f((A+4)-4) = 7 \cdot (A+4)+5$
$f(A) = 7A+28+5 \Rightarrow f(A) = 7A+33$ olur.

a) Yukarıda bulunan $f(A)$ fonksiyonunda A yerine x yazılırsa $f(x) = 7x+33$ olur.

b) Yukarıda bulunan $f(A)$ fonksiyonunda A yerine $x+2$ yazılırsa
$f(x+2) = 7(x+2)+33 \Rightarrow f(x+2) = 7x+47$ bulunur.



Örnek 14

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$ ise $f(x+2)$ fonksiyonunun $f(x)$ fonksiyonu cinsinden yazılışını bulunuz.



Çözüm

$f(x+2) = 2 \cdot (x+2)+3 = 2x+7$ ve $f(x) = 2x+3 \Rightarrow 2x = f(x)-3$ olur. $f(x+2)$ fonksiyonunda $2x$ yerine $f(x)-3$ değeri yazılırsa $f(x+2) = 2x+7 \Rightarrow f(x+2) = f(x)-3+7 \Rightarrow f(x+2) = f(x)+4$ bulunur.



Örnek 15

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlı kaç farklı fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

Fonksiyon; A kümesinden B kümesine tanımlandığından A tanım kümesini, B ise değer kümesini oluşturur. Bu durumda
$a \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
$b \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde,
$c \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan biri ile 4 farklı şekilde eşlenebileceği görülür.
Buradan saymanın temel ilkesi gereği $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ tane A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon yazılabilir.



İpucu

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı n^m dir.



Örnek 16

$A=\{2,\ 4,\ 8,\ 10\}$ ve $B=\{x,\ y,\ z\}$ kümeleri için $f: A \to B$ olmak üzere $f(2)=f(8)=z$ koşuluna uygun kaç tane f fonksiyonu yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

1. yol

Tanım kümesindeki 2 ve 8 elemanlarının görüntüleri z dir. Tanım kümesinde geriye kalan 2 eleman değer kümesindeki 3 eleman ile $3^2=9$ farklı fonksiyon oluşturabilir. Buradan cevap 9 bulunur.

2. yol

2 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 1 tanedir (z).

4 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 3 tanedir (x, y, z).

8 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 1 tanedir (z).

10 sayısının eşlenebileceği eleman sayısı 3 tanedir (x, y, z).

Buradan çarpma yoluyla sayma ilkesi kullanılarak A dan B ye yazılabilecek fonksiyon sayısı,

$1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$ olur.



Örnek 17

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=5^{x-2}+1$ ise $f(x+2)$ fonksiyonunun $f(x)$ fonksiyonu cinsinden eşitini bulunuz.



Çözüm

$f(x+2)=5^{x+2-2}+1=5^x+1$ olur. Bu eşitlikte 5^x teriminin $f(x)$ cinsinden değeri,

$f(x)=5^{x-2}+1$

$f(x)-1=5^x \cdot 5^{-2}$

$f(x)-1=\dfrac{5^x}{25}$

$5^x=25f(x)-25$ olur.

Bu değer $f(x+2)$ fonksiyonunda 5^x yerine yazılırsa

$f(x+2)=5^x+1=25 \cdot f(x)-25+1=25 \cdot f(x)-24$ olur.



Örnek 18

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x+1)=f(x)+x$ eşitliğinde $f(1)=3$ ise $f(4)$ değerini hesaplayınız.



Çözüm

$f(x+1)=f(x)+x \Rightarrow f(x+1)-f(x)=x$ olur.

Elde edilen bu eşitlikte x yerine 1 den başlanıp sırasıyla 2 ve 3 değerleri yazılırsa

$x=1$ için $f(2)-f(1)=1 \Rightarrow f(2)=1+3=4$,

$x=2$ için $f(3)-f(2)=2 \Rightarrow f(3)=2+4=6$,

$x=3$ için $f(4)-f(3)=3 \Rightarrow f(4)=3+6=9$ olur.



Örnek 19

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x+1)-x\cdot f(x)=0$ eşitliğinde $f(2)=1$ ise $f(20)$ değerini hesaplayınız.



Çözüm

$f(x+1)=x\cdot f(x)\Rightarrow\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=x$ olur. Elde edilen bu eşitlikte x yerine 2, 3, ..., 19 değerleri yazılırsa

$x=2$ için $\dfrac{f(3)}{f(2)}=2$

$x=3$ için $\dfrac{f(4)}{f(3)}=3$

$x=4$ için $\dfrac{f(5)}{f(4)}=4$

.
.
.

$x=19$ için $\dfrac{f(20)}{f(19)}=19$ olur.

Yukarıdaki ifadeler taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{\cancel{f(3)}}{f(2)}\cdot\frac{\cancel{f(4)}}{\cancel{f(3)}}\cdot\frac{\cancel{f(5)}}{\cancel{f(4)}}\cdot\ldots\cdot\frac{f(20)}{\cancel{f(19)}}=2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot19$$

$$\frac{f(20)}{f(2)}=19!\Rightarrow\frac{f(20)}{1}=19!\Rightarrow f(20)=19!\text{ olur.}$$



Örnek 20

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x^2+x)=6x^2+6x-5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x^2+x)=6\cdot(x^2+x)-5$ fonksiyonunda x^2+x yerine A yazılırsa fonksiyon $f(A)=6A-5$ bulunur.
Buradan $A=2$ için $f(2)=6\cdot2-5=7$ olur.



Örnek 21

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(2x^2+3x-1)=6x^2+9x+7$ fonksiyonu için $f(3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(2x^2+3x-1)=6x^2+9x+7\Rightarrow f(2x^2+3x-1)=3\cdot(2x^2+3x-1)+10$ olur.

Verilen fonksiyonda $2x^2+3x-1$ yerine 3 yazılırsa

$$f(\underbrace{2x^2+3x-1}_{3})=3\cdot(\underbrace{2x^2+3x-1}_{3})+10\Rightarrow f(3)=3\cdot3+10\Rightarrow f(3)=19\text{ elde edilir.}$$



Örnek 22

Aşağıda, her gün kitap okuyan Gülbahar'ın 5 günlük bir süre içinde her bir güne ait okuduğu sayfa sayılarını gösteren bir tablo verilmiştir.

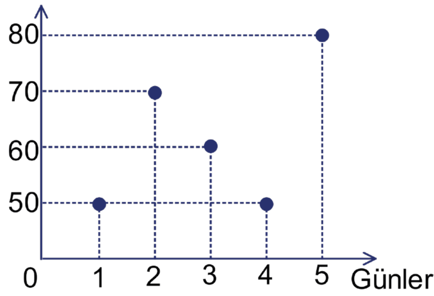
Günler	1.	2.	3.	4.	5.
Sayfa sayısı	50	70	60	50	80

Bu bilgiler yardımıyla Gülbahar'ın günlere göre okuduğu sayfa sayısını veren grafiği oluşturunuz.



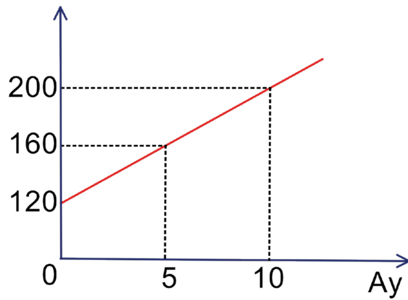
Çözüm

Tabloda Gülbahar'ın 1. gün 50, 2. gün 70, 3. gün 60, 4. gün 50, 5. gün 80 sayfa kitap okuduğu görülüyor. Yatay eksende günler, dikey eksende okuduğu sayfa sayıları gösterilerek grafik aşağıdaki gibi oluşturulabilir.





Örnek 23



Yandaki grafikte bir fidanın zamana göre boyundaki değişim gösterilmiştir. Bu fidanın dikildiği andan itibaren 10 aylık süre içinde boyunun aylara göre değişimini gösteren bir tablo yapınız.



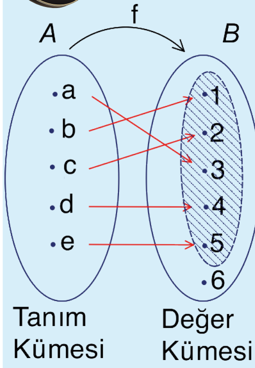
Çözüm

Grafiğe bakıldığında fidanın 120 cm olarak dikildiği görülür. Fidanın dikildiği aydaki boyu 120 cm, 5. aydaki boyunun 160 cm olmasından hareketle fidanın 5 ayda 40 cm uzadığı görülmüştür. Fidan aylara göre doğru orantılı olarak uzadığından her ay $\frac{40}{5} = 8$ cm uzar. Bu veriler aşağıda verilen tablodaki gibi gösterilir.

Aylar	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Fidanın Boyu	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200



Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f: A \to B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) \neq B$ olduğuna göre (değer kümesinde en az bir eleman açıkta kalıyorsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir. f içine fonksiyon ise kısaca **f içinedir** denir.

Yanda verilen f fonksiyonu bir içine fonksiyondur çünkü f nin görüntü kümesi {1, 2, 3, 4, 5} olup f nin değer kümesi olan {1, 2, 3, 4, 5, 6} ne eşit değildir.



Örnek 24

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 2, 3, 11\}$ ve $f: A \to B$ olmak üzere $f(x) = 3x^2 - 1$ fonksiyonunun içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$f: A \to B$ fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntüleri;

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11,$

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2,$

$f(0) = 3 \cdot (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1,$

$f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ olur.

Buna göre $f(A) = \{-1, 2, 11\}$ olur.

Elde edilen görüntü kümesi değer kümesine eşit olmadığından ($f(A) \neq B$ olduğundan) f fonksiyonu bir içine fonksiyondur.



Örnek 25

Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların bir içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 1$

b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(x) = x - 1$



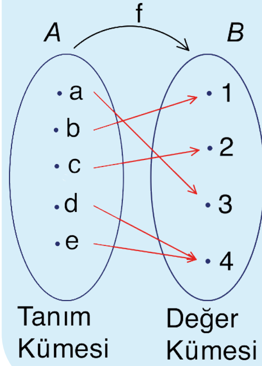
Çözüm

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesindeki çift tam sayılar eşleşmeyeceğinden f fonksiyonu içine fonksiyondur.

b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(x) = x - 1$ fonksiyonunda tanım kümesinden alınan $\forall x \in \mathbb{Z}$ için değer kümesinde açıkta eleman kalmayacağından g fonksiyonu bir **içine fonksiyon değildir**.



Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f: A \to B$ tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) = B$ olduğuna göre (değer kümesindeki her elemana karşılık tanım kümesinde en az bir eleman varsa) f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir. f örten fonksiyon ise kısaca **f örtendir** denir.

Yandaki f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ ve değer kümesi $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olup f fonksiyonunun görüntü kümesi ile değer kümesi aynıdır. Bu yüzden f bir örten fonksiyondur.



Örnek 26

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 10\}$ ve $f: A \to B$ olmak üzere $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun örten fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$f: A \to B$ fonksiyonunda tanım kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesinin elemanları;

$f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1,$

$f(0) = (0)^3 + 2 = 0 + 2 = 2,$

$f(1) = (1)^3 + 2 = 1 + 2 = 3,$

$f(2) = (2)^3 + 2 = 8 + 2 = 10$ bulunur.

Buna göre $f(A) = \{1, 2, 3, 10\}$ olur. Elde edilen görüntü kümesi, değer kümesine eşit $(f(A) = B)$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyondur.



Örnek 27

Aşağıda tanımlanan fonksiyonların örten fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x - 1$ **b)** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x - 2$ **c)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 5$



Çözüm

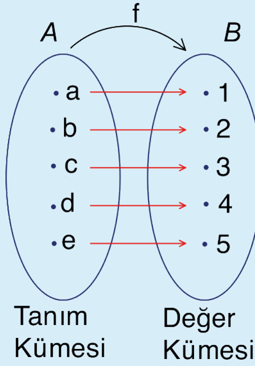
a) Değer kümesinden alınan $\forall (x - 1) \in \mathbb{Z}$ için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen $\exists x \in \mathbb{Z}$ bulunacağından f fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kalmaz. Dolayısıyla f fonksiyonu örtendir.

b) Değer kümesinden alınan bazı $5x - 2$ gerçek sayıları için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen bir x tam sayısı bulunamaz. Örneğin $5x - 2 = \frac{1}{3}$ için $x = \frac{7}{15} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyon değildir.

c) Değer kümesinden alınan bazı $x^2 + 5$ gerçek sayıları için tanım kümesinde bu sayı ile eşlenen bir x gerçek sayısı bulunamaz. Örneğin $x^2 + 5 = -1 \Rightarrow x^2 = -6$ olup $x \notin \mathbb{R}$ olduğundan f fonksiyonu örten fonksiyon değildir.



Bilgi



Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü tanım kümesindeki diğer elemanların görüntülerinden farklı ise bu fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere
$f: A \to B$ tanımlanan f fonksiyonu her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ya da $f(x) = f(y)$ için $x = y$ oluyorsa bu fonksiyon bire bir fonksiyondur.
Bir fonksiyon hem bire bir hem de örten ise bu fonksiyona **bire bir örten fonksiyon** denir. Örneğin yandaki şekilde verilen f fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyondur.



Örnek 28

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 5$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$ için
$2a \neq 2b \Rightarrow 2a + 5 \neq 2b + 5$ olur. Buradan $f(a) \neq f(b)$ olduğundan f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.
f fonksiyonu aynı zamanda örten olduğundan f fonksiyonunun bire bir örten fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.



Örnek 29

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

Tanım kümesinden alınan -1 ve 1 için
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ ve $x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ olur.
$-1 \neq 1$ için $f(-1) = f(1)$ olur. Buna göre tanım kümesinden alınan -1 ve 1 elemanlarının görüntüleri aynı olduğundan f bire bir fonksiyon değildir.



Örnek 30

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A kümesinden B kümesine tanımlı kaç farklı bire bir fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.



Çözüm

Fonksiyon; A kümesinden B kümesine tanımlandığından A tanım kümesini, B ise değer kümesini oluşturur. Fonksiyonun bire bir olması için A kümesinin her elemanını B kümesindeki herhangi bir elemanına eşleyen birden fazla elemanın olmaması gerekir. Bu durumda
$a \in A$ için B kümesindeki 4 farklı elemandan herhangi birine 4 farklı şekilde,
$b \in A$ için B kümesindeki kalan 3 farklı elemandan herhangi birine 3 farklı şekilde,
$c \in A$ için B kümesindeki kalan 2 farklı elemandan herhangi birine 2 farklı şekilde eşlenebileceği görülür. Buradan saymanın temel ilkesi gereği $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ farklı şekilde A kümesinden B kümesine bire bir fonksiyon tanımlanabilir. $s(A) = 3,\ s(B) = 4$ iken A kümesinden B kümesine tanımlanabilen bire bir fonksiyon sayısının $P(4,\ 3) = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$ olduğuna dikkat ediniz.



Örnek 31

5 gönüllü, bir ilde lösemili çocuklar yararına bir kermes düzenleyecektir. Bu kişilerin isimlerini ve kermesle ilgili yapılacak işleri gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

Gönüllüler	Yapılacak İşler
• Evren	• Ev eşyası temini
• Murat	• Giysi temini
• Semih Can	• Gıda temini
• Katibe	• Mekân temini
• Şule	• Reklam ve halkla ilişkiler

İş dağılımı aşağıdaki kurallara göre yapılacaktır.

I. Evren, belediyede çalıştığı için mekân temininden sorumlu olacaktır.

II. Semih Can, reklam ve halkla ilişkilerden sorumlu olacaktır.

III. Herkes, yalnız bir görev alacaktır.

Verilen bu bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

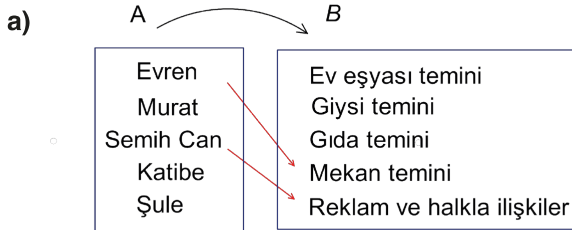
a) Kaç farklı şekilde görev dağılımı yapılabileceğini bulunuz.

b) Evren ve Semih Can'ın görevlerinin belli olmaması durumunda kaç farklı şekilde görev dağılımı yapılabileceğini bulunuz.



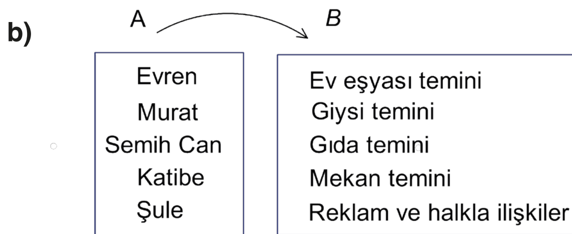
Çözüm

a)



Yandaki şekilde Evren ve Semih Can görevleriyle eşleştirilmiştir. Dolayısıyla Evren 1 farklı, Semih Can 1 farklı şekilde görev alır. Herkesin yalnız bir görevi olacağından geriye kalan 3 kişiden birincisi 3 farklı, ikincisi 2 farklı, üçüncüsü ise 1 farklı şekilde görev alır. Bu durumda saymanın temel ilkesi kullanılarak $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ farklı şekilde görev dağılımı yapılabilir (Gönüllüler ile yapılacak işler arasında yapılan bu eşlemenin bire bir fonksiyon belirttiğine dikkat ediniz.).

b)



Yandaki şekilde eşleştirilen hiçbir görev olmadığından 5 kişiden birincisi 5, ikincisi 4, üçüncüsü 3, dördüncüsü 2, beşincisi ise 1 farklı şekilde görev alabilir. Bu durumda saymanın temel ilkesi kullanılarak $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ farklı şekilde görev dağılımı yapılabilir (Gönüllüler ile yapılacak işler arasında yapılan bu eşlemenin bire bir fonksiyon belirttiğine dikkat ediniz.).



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerin tanımlı olduğu aralıklarda fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 5$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-5}{x+1}$

ç) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \frac{3x}{2}$

2. $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ ve $f(x) = 5x + 4$ olduğuna göre bu fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

3. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu "Her x gerçek sayısını kendisinin karesinin 5 eksiği ile eşleştirmektedir." şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre f fonksiyonu için

a) 7 nin görüntüsünü bulunuz.

b) $f(-3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

c) Görüntüsü 4 olan sayıları bulunuz.

4. $f : A \to B$ bir fonksiyon, $f(A) = \{5, 7, 11, 19\}$ ve $f(x) = 2x - 9$ olduğuna göre bu fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+2) = 3x - 4$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $f(5)$

b) $f(1)$

c) $f(x+5)$

ç) $f(2x+1)$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x + 7$ ve $f(a+1) = 19$ olduğuna göre a nın hangi sayıya eşit olduğunu bulunuz.

7. Aşağıdaki fonksiyonların bire bir fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$

ç) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3$

8. Aşağıdaki fonksiyonların örten ya da içine fonksiyon olup olmadığını bulunuz.

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 5x + 2$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x^2 + 4$

c) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ g(x) = 7 - 2x$

ç) $g : (-2, 8) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x+2}$

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = 3x$ ve $f(3) = 4$ olduğuna göre $f(1)$ ifadesinin değerini bulunuz.

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x^2 + x - 1) = 3x^2 + 3x - 8$ olduğuna göre $f(11)$ ifadesinin değerini bulunuz.

11. $A = \{x, \%, 1, 2\}$ kümesi veriliyor. A kümesinde tanımlı kaç farklı fonksiyon yazılabileceğini bulunuz.

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$ olduğuna göre $f(x-2)$ yi $f(x)$ cinsinden bulunuz.

13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3^{2x-1}$ ise $\frac{f(x+1)}{f(x-1)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Eşit Fonksiyonlar



Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere $f: A \to B,\ g: A \to B$ tanımlanan f ve g fonksiyonları; $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ şeklinde yazılabiliyor ise bu fonksiyonlara **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir. Fonksiyonların eşit olması için tanım ve görüntü kümelerinin eşit olması, tanım kümesindeki her bir eleman için bu elemanların görüntülerinin de aynı olması gerekir.



Örnek 32

$A = \{-1, 0, 1\},\ B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre
$f: A \to B,\ f(x) = 2x^3 - 1$ ve $g: A \to B,\ g(x) = 2x - 1$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadıklarını bulunuz.



Çözüm

$x = -1$ için $f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 1 = -2 - 1 = -3$ ve $g(-1) = 2\cdot(-1) - 1 = -2 - 1 = -3$,
$x = 0$ için $f(0) = 2\cdot(0)^3 - 1 = 0 - 1 = -1$ ve $g(0) = 2\cdot(0) - 1 = 0 - 1 = -1$,
$x = 1$ için $f(1) = 2\cdot(1)^3 - 1 = 2 - 1 = 1$ ve $g(1) = 2\cdot(1) - 1 = 2 - 1 = 1$ olur. Buradan
$f(-1) = g(-1),\ f(0) = g(0)$ ve $f(1) = g(1)$ olur. Dolayısıyla f ve g fonksiyonları eşit fonksiyonlardır.



Örnek 33

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (a-4)x^3 + (2b-3)x^2 - 5x + 7$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x^3 + 3x^2 - (c+1)x + d - 1$ fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonları eşit fonksiyonlar ise $a\cdot b + c\cdot d$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$f(x) = g(x)$ olduğundan x değişkenlerinden üsleri aynı olanların katsayıları birbirine eşit olmalıdır.

$a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6$

$2b - 3 = 3 \Rightarrow b = 3$

$-(c+1) = -5 \Rightarrow c = 4$

$d - 1 = 7 \Rightarrow d = 8$ bulunur. Buradan $a\cdot b + c\cdot d = 6\cdot 3 + 4\cdot 8 = 18 + 32 = 50$ olur.



Örnek 34

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ ile $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 2$ fonksiyonlarının eşit fonksiyonlar olup olmadığını bulunuz.



Çözüm

f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri eşit olmadığından $f \neq g$ olur.
Buradan $g(1) = 1 + 2 = 3$ olarak bulunabilirken $f(1)$ değeri bulunamaz.



Örnek 35

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-1)\cdot(x+2)+10$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (a-1)x^2 - 2bx + 5x + 3c - 1$ fonksiyonları veriliyor. $f(x) = g(x)$ ise $a+b-c$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları düzenlenirse

$f(x) = (2x-1)\cdot(x+2)+10 = 2x^2+4x-x-2+10 = 2x^2+3x+8$ olur.

$g(x) = (a-1)x^2 - 2bx + 5x + 3c - 1 = (a-1)x^2 + (-2b+5)x + 3c - 1$ olur.

$f(x) = g(x)$ olduğundan x değişkenlerinden üsleri aynı olanların katsayıları birbirine eşit olmalıdır.
Buradan $2 = a-1 \Rightarrow a = 3$,

$3 = -2b+5 \Rightarrow 2b = 2$ ve $b = 1$,

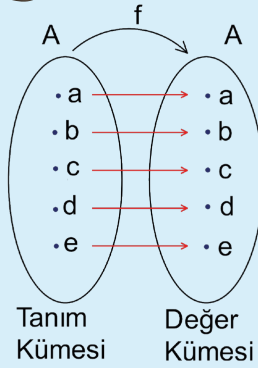
$8 = 3c-1 \Rightarrow 9 = 3c$ ve $c = 3$,

$a+b-c = 3+1-3 = 1$ olur.

Birim (Özdeşlik) Fonksiyon



Bilgi



A boş kümeden farklı bir küme ve
f, A dan A ya bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ oluyorsa f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir ve I ile gösterilir.

Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f birim fonksiyon olmak üzere

- $f(7) = 7$
- $f(\sqrt[3]{5}+2) = \sqrt[3]{5}+2$
- $f(a+4) = a+4$
- $f(x+10) = x+10$ olur.



Örnek 36

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f birim fonksiyon olmak üzere $f(2a+10) + f(a-4) = -15$ ise $f(a^2-1)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan $f(2a+10) = 2a+10$ ve $f(a-4) = a-4$ olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rl} & f(2a+10) = 2a+10 \\ + & f(a-4) = a-4 \\ \hline & f(2a+10)+f(a-4) = 3a+6 \\ & -15 = 3a+6 \\ & -7 = a \text{ olur.} \end{array}$$

$f(a^2-1) = a^2-1 \Rightarrow a = -7$ için $f((-7)^2-1) = (-7)^2-1 = 48$ olur.



Örnek 37



Bir çocuk oyun merkezindeki jeton makinesi bozulmuştur. İçine atılan paraya eş değer jetonların alt bölmeye düşmesi gerekirken atılan para olduğu gibi alt bölmeye düşmektedir. Cebinde birer adet 1 Türk lirası, 5 Türk lirası, 10 Türk lirası ve 20 Türk lirası bulunan Tuğba Hanım, çocukları Utku ve Mert'i bu oyun merkezine götürmüş ve jeton makinesine cebindeki paralardan birini atmıştır. Paranın olduğu gibi alt bölmeye düştüğünü görünce aynı işlemi cebindeki bütün paralarla tekrarlamış ve her defasında attığı paranın olduğu gibi alt bölmeye düştüğünü görmüştür. Buna göre bu bozuk jeton makinesinin yaptığı bu işlemi bir fonksiyonla ifade edip bu fonksiyonun türünü yazınız.



Çözüm

Tuğba Hanım'ın cebindeki paraların oluşturduğu küme $\{1, 5, 10, 20\}$ olup fonksiyonun tanım kümesini oluşturur. Tuğba Hanım cebindeki hangi parayı makineye atarsa atsın karşılık olarak makineden aynı parayı almaktadır. Bu durum bir f fonksiyonu ile $f = \{(1, 1), (5, 5), (10, 10), (20, 20)\}$ şeklinde gösterilebilir ve f fonksiyonundaki sıralı ikililerin ikinci bileşenleri görüntü kümesini oluşturur. Buradan bu fonksiyonun görüntü kümesi de $\{1, 5, 10, 20\}$ olur.
Buradan her sayı, yine kendisi ile eşlendiğinden fonksiyon $f(x) = x$ şeklinde de gösterilebilir ve bu fonksiyon bir birim fonksiyondur.



Örnek 38

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (m-2)x + 2n + 6$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $m \cdot n$ değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu birim fonksiyon olduğundan $f(x) = x$ olmalıdır. Buna göre x in katsayısı 1 e, diğer terimler 0 a eşittir.

$$f(x) = (m-2)x + 2n + 6$$
$$x = \underbrace{(m-2)}_{1}x + \underbrace{2n+6}_{0}$$

$m - 2 = 1$ ve $2n + 6 = 0$ olduğundan $m = 3$ ve $n = -3$ olur. Buradan $m \cdot n = 3 \cdot (-3) \Rightarrow m \cdot n = -9$ olur.



Örnek 39

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f birim fonksiyon ve $f(3x-1) = (k+1)x^2 + mx - 2x - n + 5$ olduğuna göre $k + m + n$ değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu birim fonksiyon olduğundan $f(3x-1) = 3x - 1$ olur. Buradan

$$f(3x-1) = (k+1)x^2 + (m-2)x - n + 5$$
$$3x - 1 = \underbrace{(k+1)}_{0}x^2 + \underbrace{(m-2)}_{3}x \underbrace{-n+5}_{-1}$$

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

$m - 2 = 3 \Rightarrow m = 5$

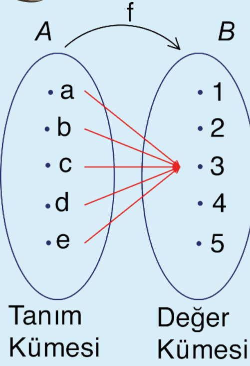
$-n + 5 = -1 \Rightarrow n = 6$ olur.

Buradan $k + m + n = (-1) + 5 + 6 = 10$ olur.

Sabit Fonksiyon



Bilgi



A ve B boş olmayan kümeler ve $k \in B$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için $f(x) = k$ oluyorsa bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.

Yandaki şekilde tanımlanan f fonksiyonu için $f : A \rightarrow B$, $\forall x \in A$ olmak üzere $f(x) = 3$ olur.

Örneğin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}$ olmak üzere

- $f(7) = \sqrt{2}$
- $f(\sqrt[3]{5} + 2) = \sqrt{2}$
- $f(4) = \sqrt{2}$
- $f(x + 10) = \sqrt{2}$ olur.



Örnek 40

Orhan Bey'in mağazasında beş çeşit ürün satılmaktadır. Orhan Bey hesapları kontrol ederken mağazadaki ürünlerin satışlarının yeterli düzeyde olmadığını görmüştür. Bunun üzerine satışları artırmak amacıyla "Her bir ürün sadece 5 Türk lirası." sloganlı bir kampanya başlatmış ve mağazadaki her bir ürünü 5 Türk lirasına satmaya karar vermiştir. Kampanya sonucu satışların istediği düzeye geldiğini görünce kampanyayı sürekli hâle getirmiştir. Buna göre Orhan Bey'in yaptığı kampanyadaki satış stratejisini gösteren bir fonksiyon yazarak bu fonksiyonun türünü bulunuz.



Çözüm

Orhan Bey'in mağazasındaki ürün çeşitlerinin kümesi $A = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Orhan Bey'in mağazasındaki tüm ürünlerin fiyatlarının aynı olması nedeniyle hangi ürün alınırsa alınsın hep 5 lira ödenecektir. Bu durumda

$f(a) = 5$,

$f(b) = 5$,

$f(c) = 5$,

$f(d) = 5$,

$f(e) = 5$ olur.

Buradan fonksiyon $f(x) = 5$ olarak yazılabilir. Bu fonksiyon ise bir sabit fonksiyondur.



Örnek 41

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (t - 4)x + 3t - 1$ ve f sabit bir fonksiyondur. Buna göre t nin değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)$ sabit bir fonksiyon olduğundan x in katsayısı 0 olmalıdır. Buradan x in katsayısı $t - 4 = 0$ olup $t = 4$ olur.



İpucu

Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ biçiminde verilen $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ eşitliği sağlanır.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

k bir sabit sayı olmak üzere $\frac{ax+b}{cx+d}=k \Rightarrow ax+b=kcx+kd \Rightarrow (a-kc)x+b-kd=0$ eşiliğinin sağlanabilmesi için $a-kc=0$ ve $b-kd=0$ olmalıdır. Buradan $a=kc \Rightarrow k=\frac{a}{c}$ ve $b=kd \Rightarrow k=\frac{b}{d}$ elde edilir. Buradan $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ olduğu görülür.



Örnek 42

$g:\mathbb{R}^{-}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $g(x)=\frac{4x+k+1}{2x-6}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre k nin değerini bulunuz.



Çözüm

g(x) sabit fonksiyon olduğundan

$\frac{4}{2}=\frac{k+1}{-6}$

$2k+2=-24$

$k=-13$ olur.



Örnek 43

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, f birim fonksiyon ve $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, g sabit fonksiyon olmak üzere
$f(x+3)+g(x)=x+12$ olduğuna göre $f(7)+g(77)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan $f(x+3)=x+3$ olur ve g sabit fonksiyon olduğundan $g(x)=c$ $(c\in\mathbb{R})$ olur.
Bu durumda

$f(x+3)+g(x)=x+3+c=x+12 \Rightarrow c=9$,

$f(7)=7$ ve $g(77)=9$,

$f(7)+g(77)=7+9=16$ olur.



Örnek 44

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu birim fonksiyon, $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olmak üzere
$f(7x+5)+g(x-2)=3\cdot f(2x-7)+g(x^3)$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.



Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan $f(7x+5)=7x+5$ ve $f(2x-7)=2x-7$ olur.
g sabit fonksiyon olduğundan $g(x-2)=g(x^3)$ olur. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$7x+5+\cancel{g(x-2)}=3\cdot(2x-7)+\cancel{g(x^3)}$

$7x+5=6x-21$

$x=-26$ olur.

Doğrusal Fonksiyon



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir. f bir doğrusal fonksiyon ise grafiği bir doğrudur.



Örnek 45

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (a - b - 5)x^3 + (a + b + 1)x^2 + ax + b$ fonksiyonu doğrusal fonksiyon olduğuna göre f(2) değerini bulunuz.



Çözüm

f doğrusal fonksiyon olduğundan x^3 ve x^2 li terimlerin katsayılarının 0 olması gerekir. Buradan

$a - b - 5 = 0$ ve $a + b + 1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda

$\left.\begin{matrix} a - b = 5 \\ a + b = -1 \end{matrix}\right\}$ denklemlerinin ortak çözümünden $a = 2$ ve $b = -3$ olur.

Bu değerler $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda yerine yazılırsa $f(x) = 2x - 3$ olur.

Buradan $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$ olur.



Örnek 46

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(1) = 5$, $f(2) = 8$ olduğuna göre $f(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f doğrusal fonksiyon olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindedir.

$x = 1$ için $f(1) = a + b = 5$ olur.

$x = 2$ için $f(2) = 2a + b = 8$ olur.

$\left.\begin{matrix} a + b = 5 \\ 2a + b = 8 \end{matrix}\right\}$ denklemlerinin ortak çözümünden $a = 3$ ve $b = 2$ olur.

Bu değerler $f(x) = ax + b$ fonksiyonuda yerine yazılırsa $f(x) = 3x + 2$ ve $f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$ bulunur.



Örnek 47

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(x + 1) + f(x) = 10x - 7$ ise $f(-2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

f bir doğrusal fonksiyon olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindedir. Buradan

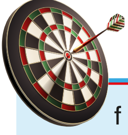
$f(x + 1) = a \cdot (x + 1) + b = ax + a + b$ olur. Bu değerler $f(x + 1) + f(x) = 10x - 7$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$f(x + 1) + f(x) = ax + a + b + ax + b = 10x - 7 \Rightarrow 2ax + a + 2b = 10x - 7$ olur.

Buradan $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ ve $a + 2b = -7 \Rightarrow 5 + 2b = -7 \Rightarrow b = -6$ olur.

Buradan $f(x) = ax + b = 5x - 6$ olur. $x = -2$ için $f(-2) = 5 \cdot (-2) - 6 = -16$ olur.

Tek Fonksiyon ve Çift Fonksiyon



Bilgi

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için
- $f(-x) = f(x)$ olan f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.
- $f(-x) = -f(x)$ olan f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.



Örnek 48

Aşağıda verilen fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3$ **b)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 3x$ **c)** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 5x^5 - 8x + 1$



Çözüm

a) $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur.

b) $g(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyondur.

c) $h(x) = 5x^5 - 8x + 1$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa $h(-x) = 5(-x)^5 - 8(-x)^2 + 1 = -5x^5 - 8x^2 + 1$ olur. $h(-x) \neq h(x)$ ve $h(-x) \neq -h(x)$ olduğundan h fonksiyonu çift fonksiyon ya da tek fonksiyon değildir.



Örnek 49

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = g(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon; $f(5) = 7$ ve $2x - f(-x) = 3g(-x) + x^2 + 5$ olmak üzere $g(5)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan $f(-x) = f(x)$ olur. Buradan $f(-5) = f(5) = 7$ bulunur.
g fonksiyonu bir tek fonksiyon olduğundan $g(-x) = -g(x)$ olur. Buradan $g(-5) = -g(5)$ bulunur.
$2x - f(-x) = 3g(-x) + x^2 + 5$ eşitliğinde x yerine 5 yazılırsa

$$2 \cdot 5 - \underbrace{f(-5)}_{f(5)} = 3\underbrace{g(-5)}_{-g(5)} + 5^2 + 5 \Rightarrow 10 - 7 = -3g(5) + 30 \Rightarrow -27 = -3g(5) \Rightarrow g(5) = 9 \text{ olur.}$$



Örnek 50

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x^3 + (a+1)x^2 + bx + c + 4$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $a \cdot c$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

Verilen $y = f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $f(-x) = -f(x)$ olmalıdır.
$f(-x) = -5x^3 + (a+1)x^2 - bx + c + 4$ ve $-f(x) = -5x^3 - (a+1)x^2 - bx - c - 4$ olduğundan eşitliğin sağlanması için aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşit olur. Buradan
$a + 1 = -a - 1 \Rightarrow a = -1$ ve $c + 4 = -c - 4 \Rightarrow c = -4$ bulunur. Dolayısıyla $a \cdot c = (-1) \cdot (-4) = 4$ olur.

Parçalı Fonksiyon



Bilgi

Tanım kümesinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallarla belirlenen fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** ya da **parçalı fonksiyonlar** denir. Örneğin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & a \le x < b \text{ ise} \\ h(x), & b \le x \le c \text{ ise} \\ r(x), & c < x \le d \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna **parçalı fonksiyon**, $g(x), h(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarına **parçalı fonksiyonların dalları** denir. a, b, c ve d fonksiyonun kritik noktalarıdır.



Örnek 51



Bir telefon operatörünün bir aylık sesli arama tarifesi aşağıdaki gibidir.

- Toplam 200 dakikaya kadar olan aramalar sabit 20 Türk lirasıdır.
- 200 dakikadan sonra her 1 dakika için ekstra 25 kuruştur.
- Ücret 400 dakikadan sonra 70 Türk lirasına sabitlenmiştir.

Buna göre telefon operatörünün sesli aramalarla ilgili Türk lirası cinsinden bir aylık fiyat tarifesinin kurallarını belirten bir fonksiyon yazınız.



Çözüm

Dakika cinsinden konuşma süresi x, Türk lirası cinsinden ücreti veren fonksiyon f(x) olsun. Buna göre bu tarifenin kuralları, uygun tanım aralığında aşağıdaki gibi bir fonksiyon ile gösterilebilir.

$$f(x)=\begin{cases} 20, & 0 \le x \le 200 \text{ ise} \\ 20+\dfrac{x-200}{4}, & 200 < x \le 400 \text{ ise} \\ 70, & 400 < x \text{ ise} \end{cases}$$



Örnek 52

Tanım kümesi $[-3, 10)$ olan f fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases} 3x+4, & -3 \le x < 2 \text{ ise} \\ x^2, & 2 \le x \le 6 \text{ ise} \\ 5-2x, & 6 < x < 10 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre $f(0)+f(6)+f(9)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$0 \in [-3, 2)$ olduğundan $f(x)=3x+4$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(0)=3\cdot 0+4=0+4=4$ olur.

$6 \in [2, 6]$ olduğundan $f(x)=x^2$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(6)=6^2=36$ olur.

$9 \in (6, 10)$ olduğundan $f(x)=5-2x$ kuralı kullanılmalıdır. Buradan $f(9)=5-2\cdot 9=5-18=-13$ olur.

Buradan $f(0)+f(6)+f(9)=4+36-13=27$ olur.



Örnek 53

Emre, Damla ve Yağmur'un satış danışmanlığını yaptığı bir firmanın maaş politikası; satış danışmanının sattığı ürün adedi x, kişinin aldığı maaş miktarı Türk lirası cinsinden $f(x)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\begin{cases} 5x+800, & x<100 \text{ ise} \\ 10x+700, & 100\leq x<150 \text{ ise} \\ 12x+600, & x\geq 150 \text{ ise} \end{cases}$$

Kasım ayı satış ve maaş durumu aşağıda verilmiştir.

I. Toplam 350 ürün satılmıştır.

II. Emre, Damla'nın iki katı, Yağmur'un dört katı ürün satmıştır.

III. Dayanışma amacıyla o ayki maaşı en fazla olan çalışan, o ayki maaşı en az olan çalışana maaşının %10 unu vermektedir.

Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Damla'nın kaç ürün sattığını bulunuz.

b) Emre'nin eline geçen tutarın kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

c) Aynı satış oranlarıyla 420 ürün satılsaydı dayanışma amacıyla Emre'nin Yağmur'a kaç Türk lirası yardımda bulunabileceğini hesaplayınız.



Çözüm

Emre'nin sattığı ürün miktarı $4k$ olarak seçilirse Damla'nın sattığı ürün miktarı $2k$ ve Yağmur'un sattığı ürün miktarı k olur. Toplam 350 ürün satıldığından $4k+2k+k=350 \Rightarrow k=50$ olur. Buna göre Emre 200 ürün, Damla 100 ürün ve Yağmur 50 ürün satmıştır.

a) Damla'nın sattığı ürün sayısı, $2k=2\cdot 50=100$ olur.

b) Emre'nin sattığı ürün sayısı, $4k=4\cdot 50=200$ olur. Buradan Emre'nin maaşı,

$f(x)=12x+600$ kuralından $f(200)=12\cdot 200+600=3000$ Türk lirası olur. Emre maaşının %10 u olan $3000\cdot\frac{10}{100}=300$ Türk lirasını Yağmur'a vereceğinden Emre'nin eline geçen tutar $3000-300=2700$ Türk lirası olur.

c) $7k=420 \Rightarrow k=60$ olur.

Emre'nin sattığı ürün sayısı, $4k=4\cdot 60=240$ olur. Buradan Emre'nin maaşı,

$f(x)=12x+600$ kuralından $f(240)=12\cdot 240+600=3480$ Türk lirası olur. Emre'nin Yağmur'a vereceği para miktarı, maaşının %10 u olan $3480\cdot\frac{10}{100}=348$ Türk lirası olur.



Bilgi

$A\subseteq\mathbb{R}$ ve $B\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $f: A\to\mathbb{R}$ ve $g: B\to\mathbb{R}$ fonksiyonları için

$f+g: A\cap B\to\mathbb{R}$, $f-g: A\cap B\to\mathbb{R}$ $f+g$ ve $f-g$ fonksiyonları $\forall x\in A\cap B$ için

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ve $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ şeklinde tanımlanır.



Örnek 54

$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x$ ve $g : \{2, 3, 4\} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6 - 2x$ fonksiyonları için
$(f+g)$ nin görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm

$f+g$ nin tanım kümesi f ile g fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimi ile bulunur.

$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$ olur.

$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = (2^2 + 2) + (6 - 2 \cdot 2) = (4 + 2) + (6 - 4) = 6 + 2 = 8$ olur.

$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = (3^2 + 3) + (6 - 2 \cdot 3) = (9 + 3) + (6 - 6) = 12 + 0 = 12$ olur.

Buradan $(f+g)$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{8, 12\}$ olur.



Örnek 55

$f = \{(-1, 3), (0, 1), (1, -2), (2, 2), (5, -2)\}$ ve $g = \{(-2, 1), (0, 2), (2, 3), (5, 3)\}$ fonksiyonları veriliyor.
Buna göre $f+g$ ve $f-g$ ifadelerini bulunuz.



Çözüm

- $f+g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin toplamına eşittir. Buradan f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerindeki ortak elemanlar $\{0, 2, 5\}$ olur. Buradan

  $f+g = \{(0, 1+2), (2, 2+3), (5, -2+3)\} = \{(0, 3), (2, 5), (5, 1)\}$ olur.

- $f-g$, sırasıyla f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin farkına eşittir. Buradan f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerindeki ortak elemanlar $\{0, 2, 5\}$ olur. Buradan
  $f-g = \{(0, 1-2), (2, 2-3), (5, -2-3)\} = \{(0, -1), (2, -1), (5, -5)\}$ olur.



Örnek 56

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 9x - 14$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 5x - 7$ fonksiyonları için
$(f+g)(x)$ ve $(f-g)(x)$ ifadelerini bulunuz.



Çözüm

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x^2 + 9x - 14) + (x^2 - 5x - 7) = 4x^2 + 4x - 21$ olur.

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x^2 + 9x - 14) - (x^2 - 5x - 7) = 2x^2 + 14x - 7$ olur.



Örnek 57

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 5x + 1$ fonksiyonları için
$(f+g)(3)$ ve $(f-g)(-2)$ ifadelerinin değerlerini bulunuz.



Çözüm

$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = [3 \cdot (3) - 1] + [5 \cdot (3) + 1] = 8 + 16 = 24$ olur.

$(f-g)(-2) = f(-2) - g(-2) = [3 \cdot (-2) - 1] - [5 \cdot (-2) + 1] = -7 - (-9) = 2$ olur.



Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$f \cdot g: A \cap B \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}: A \cap B \to \mathbb{R}$ $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonları $\forall x \in A \cap B$ için

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ olarak tanımlanır.



Örnek 58

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $f(x) = 2x + 5$, $(3f - 2g)(x) = 4x + 7$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.



Çözüm

Fonksiyonların fark işlemi kuralından $(3f - 2g)(x) = 3f(x) - 2g(x) = 4x + 7$ olur. Bu eşitlikte $f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$3f(x) - 2g(x) = 4x + 7$$
$$3 \cdot (2x + 5) - 2g(x) = 4x + 7$$
$$6x + 15 - 4x - 7 = 2g(x)$$
$$2x + 8 = 2g(x)$$
$$g(x) = x + 4 \text{ olur.}$$



Örnek 59

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$ fonksiyonları için

a) $(f \cdot g)(-1)$ değerini bulunuz.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(6)$ değerini bulunuz.

c) $(2f - 3g)(2)$ değerini bulunuz.

ç) $(f + 2g)(-3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

a) $(f \cdot g)(-1) = f(-1) \cdot g(-1) = [(-1)^2 - 1] \cdot [3 \cdot (-1)] = 0.(-3) = 0$ olur.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(6) = \frac{f(6)}{g(6)} = \frac{6^2 - 1}{3 \cdot 6} = \frac{35}{18}$ olur.

c) $(2f - 3g)(2) = 2 \cdot f(2) - 3 \cdot g(2) = 2 \cdot (2^2 - 1) - 3 \cdot (3 \cdot 2) = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 6 - 18 = -12$ olur.

ç) $(f + 2g)(-3) = f(-3) + 2 \cdot g(-3) = ((-3)^2 - 1) + 2 \cdot (3 \cdot (-3)) = 8 + 2 \cdot (-9) = 8 - 18 = -10$ olur.



Örnek 60

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$ fonksiyonları için

$(f \cdot g)(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ifadelerini bulunuz.



Çözüm

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 3) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$ olur.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x - 2}$ olur.



Örnek 61

$f=\{(-2,1),(-1,2),(0,3),(1,-2),(2,4)\}$ ve $g=\{(-3,4),(-1,2),(0,1),(2,3)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonları bulunuz.

a) $2\cdot f$ **b)** $g+3$ **c)** $f+g$ **ç)** $f\cdot g$ **d)** $\frac{f}{g}$



Çözüm

a) $2f=\{(-2,2\cdot f(-2)),(-1,2\cdot f(-1)),(0,2\cdot f(0)),(1,2\cdot f(1)),(2,2\cdot f(2))\}$
$=\{(-2,2\cdot 1),(-1,2\cdot 2),(0,2\cdot 3),(1,2\cdot(-2)),(2,2\cdot 4)\}$
$=\{(-2,2),(-1,4),(0,6),(1,-4),(2,8)\}$ olur.

b) $g+3=\{(-3,g(-3)+3),(-1,g(-1)+3),(0,g(0)+3),(2,g(2)+3)\}$
$=\{(-3,4+3),(-1,2+3),(0,1+3),(2,3+3)\}$
$=\{(-3,7),(-1,5),(0,4),(2,6)\}$ olur.

c) $f+g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin toplamına eşittir.

$f+g=\{(-1,2+2),(0,3+1),(2,4+3)\}$
$=\{(-1,4),(0,4),(2,7)\}$ olur.

ç) $f\cdot g$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin çarpımına eşittir.

$f\cdot g=\{(-1,2\cdot 2),(0,3\cdot 1),(2,4\cdot 3)\}$
$=\{(-1,4),(0,3),(2,12)\}$ olur.

d) $\frac{f}{g}$, f ve g fonksiyonlarının ortak birinci bileşenlerinin görüntü değerlerinin bölümüne eşittir. Dolayısıyla

$\frac{f}{g}=\left\{\left(-1,\frac{2}{2}\right),\left(0,\frac{3}{1}\right),\left(2,\frac{4}{3}\right)\right\}$
$=\left\{(-1,1),(0,3),\left(2,\frac{4}{3}\right)\right\}$ olur.



Örnek 62

$f:A\to\mathbb{R},\ g:B\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$f=\{(0,2),(1,5),(2,6),(3,4)\}$ ve $g=\{(-1,1),(1,7),(3,3),(5,2)\}$ olarak veriliyor.

Buna göre aşağıdaki fonksiyonları liste biçiminde yazınız.

a) $3f-g$ **b)** $f\cdot g$



Çözüm

$A=\{0,1,2,3\}$ ve $B=\{-1,1,3,5\}$ olup f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişim kümesi, $A\cap B=\{1,3\}$ olur. Buradan 1 ve 3 elemanlarının görüntüleri bulunur.

$f(1)=5,\ g(1)=7$ ve $f(3)=4,\ g(3)=3$ olur.

a) $(3f-g)(1)=3f(1)-g(1)=3\cdot 5-7=15-7=8$
$(3f-g)(3)=3f(3)-g(3)=3\cdot 4-3=12-3=9$
$3f-g=\{(1,8),(3,9)\}$ olur.

b) $(f\cdot g)(1)=f(1)\cdot g(1)=5\cdot 7=35$
$(f\cdot g)(3)=f(3)\cdot g(3)=4\cdot 3=12$
$f\cdot g=\{(1,35),(3,12)\}$ olur.



Örnek 63

$f=\{(-2,5),(0,3),(1,2),(2,4)\}$ ve $g=\{(-1,3),(2,4),(0,5)\}$ ise $\dfrac{(f+2g)(0)}{(f\cdot g)(2)}$ değerini bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{(f+2g)(0)}{(f\cdot g)(2)}=\dfrac{f(0)+2g(0)}{f(2)\cdot g(2)}=\dfrac{3+2\cdot 5}{4\cdot 4}=\dfrac{13}{16}$ olur.



Örnek 64

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}$ için $(f\cdot g)(x)=x^3-x^2+3x-4$ ve $f(x)=2x-6$ olduğuna göre $g(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$(f\cdot g)(x)=x^3-x^2+3x-4$ fonksiyonunda $x=2$ için $(f\cdot g)(2)=f(2)\cdot g(2)=(2)^3-(2)^2+3\cdot 2-4$ olur.
Buradan $(2\cdot 2-6)\cdot g(2)=8-4+6-4$ ve $(4-6)\cdot g(2)=6\Rightarrow g(2)=-3$ olur.



Örnek 65

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları için
$(f+g)(x)=4x+6$ ve $(2f-g)(x)=5x-3$ olduğuna göre $(f\cdot g)(-4)$ değerini bulunuz.



Çözüm

Fonksiyonların toplam ve fark işlemi tanımından
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=4x+6$ ve $(2f-g)(x)=2f(x)-g(x)=5x-3$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$\left.\begin{aligned} f(x)+g(x)&=4x+6\\ 2f(x)-g(x)&=5x-3\end{aligned}\right\}$ ifadeleri taraf tarafa toplanırsa $3f(x)=9x+3\Rightarrow f(x)=3x+1$ olur.

$f(x)+g(x)=4x+6$ fonksiyonunda $f(x)$ yerine $3x+1$ yazılırsa
$3x+1+g(x)=4x+6\Rightarrow g(x)=x+5$ bulunur. Buradan fonksiyonlarda çarpma işlemi tanımından
$(f\cdot g)(-4)=f(-4)\cdot g(-4)=(3\cdot(-4)+1)\cdot(-4+5)=(-11)\cdot(1)=-11$ olur.



Örnek 66

İzmir ile Van arasındaki mesafe karayolu ile 1755 km dir. İzmir'de bulunan Leyla, otomobili ile sabit 80 km/sa, Van'da bulunan Mecnun otomobili ile sabit 90 km/sa hızla aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyorlar. Leyla ile Mecnun'un x saat sonra aralarındaki mesafeyi veren f(x) eşleştirme kuralını bulunuz.

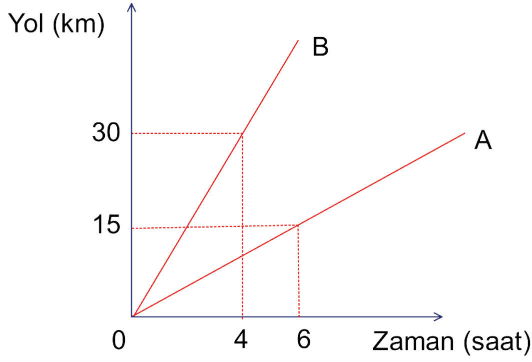


Çözüm

İzmir'de bulunan Leyla Van'a hareket ettiğinde 1 saatte 80 km, x saatte ise $80x$ km yol alır.
Van'da bulunan Mecnun İzmir'e hareket ettiğinde 1 saatte 90 km, x saatte ise $90x$ km yol alır.
Birbirlerine doğru x saatte $80x+90x=170x$ km yaklaşırlar.
İzmir ile Van arası 1755 km olduğundan x saat sonra aralarındaki mesafe $f(x)=1755-170x$ olur.



Örnek 67



Sabit hızlarla hareket eden A ve B marka araçların yol-zaman grafiği yanda verilmiştir. Aynı anda ve aynı yönde harekete başlayan bu iki aracın zamana (saat) bağlı hızlarını veren birer fonksiyon yazıp bu araçların aralarındaki mesafenin kaç saat sonra 25 km olacağını bulunuz.



Çözüm

A aracı, 6 saatte 15 kilometre yol aldığından 1 saatte $\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$ kilometre yol alır. x saat cinsinden zaman olmak üzere alınan yolu gösteren fonksiyon $f(x)=\frac{5}{2}x$ olur.

B aracı, 4 saatte 30 kilometre yol aldığından 1 saatte $\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$ kilometre yol alır. x saat cinsinden zaman olmak üzere alınan yolu gösteren fonksiyon $h(x)=\frac{15}{2}x$ olur.

t saat sonra aralarındaki mesafe 25 km olsun.

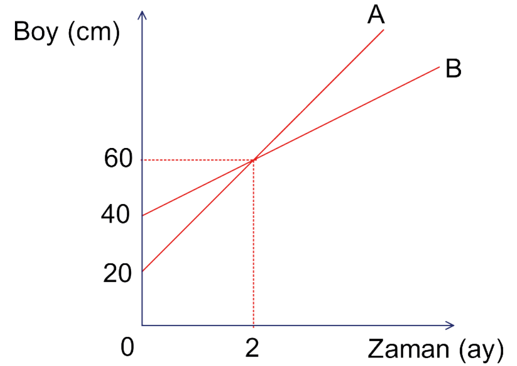
$h(t)-f(t)=25 \Rightarrow \frac{15}{2}t-\frac{5}{2}t=25 \Rightarrow \frac{10t}{2}=25 \Rightarrow t=5$ olur.

Buna göre 5 saat sonra bu iki araç arasındaki mesafe 25 kilometre olur.



Örnek 68

Aynı anda dikilen A ve B fidanlarının boylarındaki artış yandaki grafikte gösterilmiştir. Bu fidanların zamana (ay) bağlı boyunu veren birer fonksiyon yazıp fidanların dikildikten kaç ay sonra boylarının farkının 60 cm olacağını bulunuz.





Çözüm

20 cm olarak dikilen A fidanının boyu, 2. ayın sonunda 60 cm ye ulaştığından fidan 2 ayda 40 cm uzamıştır. Buna göre fidan 1 ayda $\frac{40}{2}=20$ cm uzar. A fidanının boyunu gösteren grafik doğrusal olduğundan A fidanı, her ay 20 cm uzayacaktır.

Bu fidanın dikildiği aydaki boyu 40 cm, 2 ay sonraki boyu 60 cm ye ulaştığından fidan 2 ayda 20 cm uzamıştır. Buna göre fidan 1 ayda $\frac{20}{2}=10$ cm uzar. B fidanının boyunu gösteren grafik de doğrusal olduğundan B fidanı her ay 10 cm uzayacaktır.

A fidanının x zamanına bağlı boyunu veren fonksiyon $f(x)=20+20x$,

B fidanının x zamanına bağlı boyunu veren fonksiyon $g(x)=40+10x$,

x ay sonra boylarının farkı 60 cm olacağından

$f(x)-g(x)=60 \Rightarrow (20+20x)-(40+10x)=60 \Rightarrow 10x-20=60 \Rightarrow x=8$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. Reel sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x)=(a+3)x+b-2$, $g(x)=5x-a-6$ ve $f(x)=g(x)$ olduğuna göre $a\cdot b$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $g(2x+5)=(a+1)x^2+(b-2)x+c+7$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $a\cdot b\cdot c$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(2+a)x^5-3x^4+(b-3)x^3-6$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğuna göre $a-b$ ifadesinin değerini bulunuz.

4. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x<0 \text{ ise}\\ x^2+1, & 0\le x<3 \text{ ise}\\ \dfrac{5x+3}{2}, & 3\le x \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre $f(-2)+f(1)+f(4)$ değerini bulunuz.

5. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=11x-1$, $g(x)=x+1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre

a) $(f+2g)(7)$ ifadesinin değerini bulunuz.

b) $(f\cdot g)(4)$ ifadesinin değerini bulunuz.

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $f=\{(-1, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
$g=\{(0, 1), (2, 1), (3, 5), (4, 1)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre

a) $(f-2g)(0)$ ifadesinin değerini bulunuz.

b) $(3f+4g)(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. 48 litrelik benzin deposu bulunan A aracı saatte 6 litre, 30 litrelik benzin deposu bulunan B aracı saatte 3 litre benzin tüketmektedir. A ve B araçlarının benzin deposu tam dolu iken bu araçlar kesintisiz yol alıyor. Aynı anda harekete başlayan bu iki aracın deposunda kalan benzin miktarını gösteren bir yakıt-zaman grafiği çizip harekete başladıktan kaç saat sonra depolarında eşit miktarda benzin kalacağını bulunuz.

8.

	2010	2015
A okulu	160	180
B okulu	820	790

A ve B okullarının bazı yıllara ait öğrenci sayıları yukarıdaki tabloda verilmiştir. A okulunun öğrenci sayısının bir önceki yıla göre aynı miktarda artmakta, B okulunun öğrenci sayısının ise bir önceki yıla göre aynı miktarda azalmakta olduğu bilindiğine göre bu iki okulun hangi yılda öğrenci sayılarının eşit olacağını bulunuz.

9. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(x+1)+f(x-1)=10x-12$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-2)$ değerini bulunuz.

10. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ birim fonksiyon, $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyon olmak üzere $\dfrac{f(2x+3)+g(x)-2x}{4}=5$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $g(2018)$ ifadesinin değerini bulunuz.

11. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ve $f(x)=\dfrac{2x-4}{5}$ için $f(3m-2)=5\cdot f(m-1)$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

10.2.1.2. Fonksiyonların Grafikleri

Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde $y = ax + b$ doğrusunun grafiğini belirtir. Bir doğrunun grafiğini dik koordinat sisteminde çizmek için bu doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla $y = ax + b$ denklemini sağlayan en az 2 tane (x, y) sıralı ikilisi seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru parçası oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.



Örnek 69

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

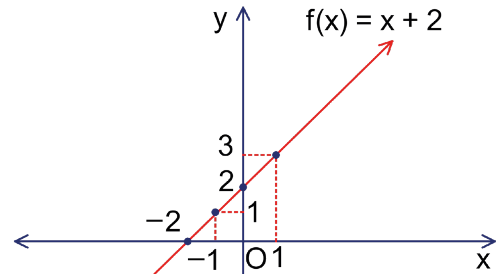


Çözüm

1. yol

$y = f(x)$ fonksiyonunun geçtiği herhangi üç noktayı belirlemek için x yerine tanım kümesinden, farklı üç eleman seçilerek y değerleri bulunur.

x	−1	0	1
$y = f(x)$	1	2	3



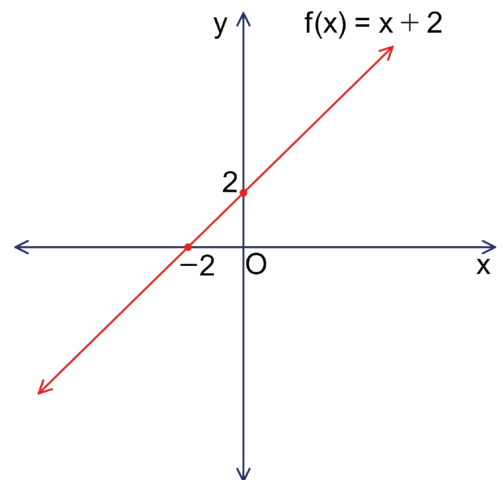
Buradan $(-1, 1)$, $(0, 2)$ ve $(1, 3)$ noktaları elde edilir. Fonksiyon doğrusal olduğundan fonksiyonu sağlayan diğer noktalar da bu doğru üzerindedir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

2. yol

$y = x + 2$ denkleminde x yerine 0 yazılarak fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği nokta bulunur. Daha sonra y yerine 0 yazılarak fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği nokta bulunur. Bulunan bu iki noktadan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

$x = 0$ için $y = 2$ olur. Grafik y eksenini $(0, 2)$ noktasında keser.

$y = 0$ için $x = -2$ olur. Grafik x eksenini $(-2, 0)$ noktasında keser.





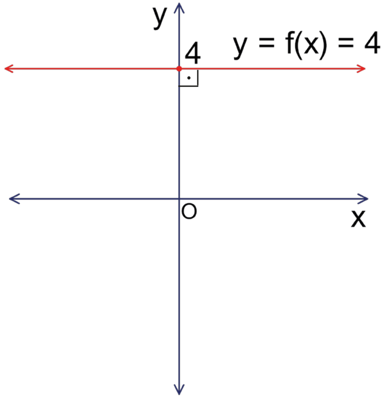
Örnek 70

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Çözüm

$y = 4$ doğrusunun grafiği $(0,4)$ noktasından geçen ve x eksenine paralel bir doğru grafiğidir. Bu grafik aşağıdaki gibi çizilebilir.





Örnek 71

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

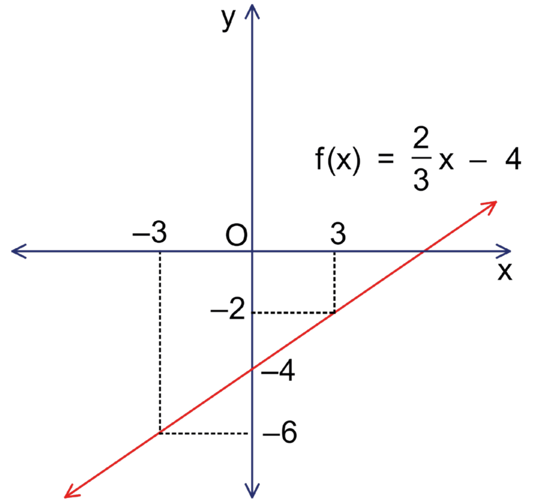


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine -3, 0, 3 değerleri yazılarak y değerleri bulunur.

x	–3	0	3
$y = f(x)$	–6	–4	–2

Buradan $(-3, -6)$, $(0, -4)$ ve $(3, -2)$ noktaları elde edilir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.





Örnek 72

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

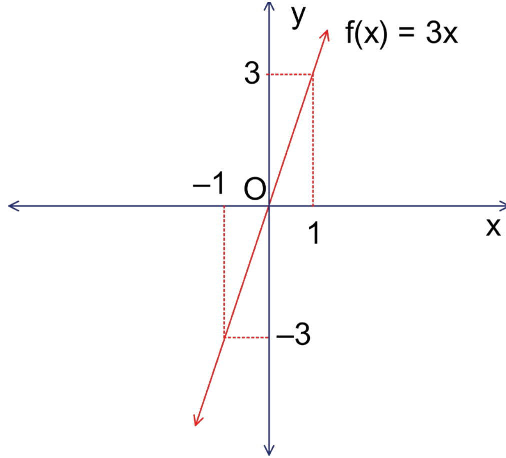


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine $-1,\ 0,\ 1$ değerleri yazılarak y değerleri bulunur.

x	–1	0	1
$y = f(x)$	–3	0	3

Buradan $(-1,\ -3)$, $(0,\ 0)$ ve $(1,\ 3)$ noktaları elde edilir. Bulunan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenerek bu noktalardan geçen doğru çizilir. Çizilen bu doğru f fonksiyonunun grafiğidir.



$f(x) = ax$ biçimindeki doğrusal fonksiyon grafiklerinin orijinden geçtiğine dikkat ediniz.

Parçalı Fonksiyonların Grafikleri



Örnek 73

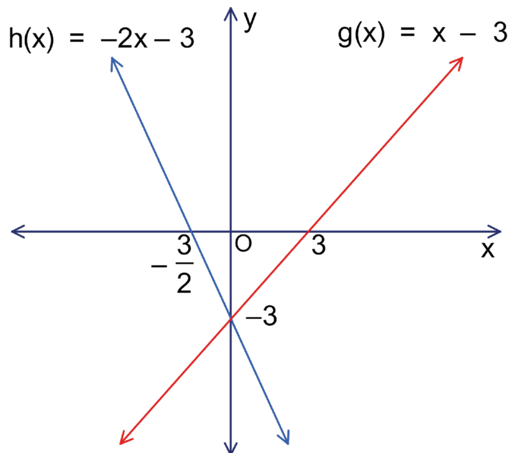
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = \begin{cases} x-3, & x \le 0 \text{ ise} \\ -2x-3, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

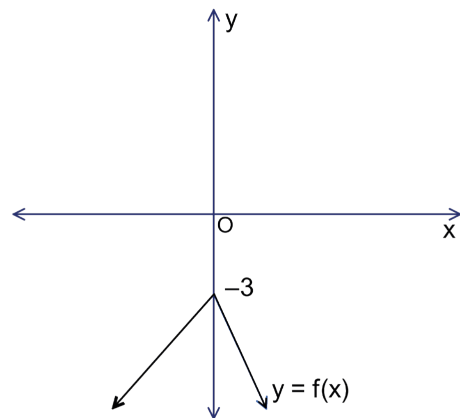


Çözüm

Önce f fonksiyonu $g(x) = x - 3$ ve $h(x) = -2x - 3$ olmak üzere iki ayrı fonksiyona ayrılarak bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.



g fonksiyonunun $(-\infty,\ 0]$ aralığındaki parçası ve h fonksiyonunun $(0,\ \infty)$ aralığındaki parçası alınarak f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.





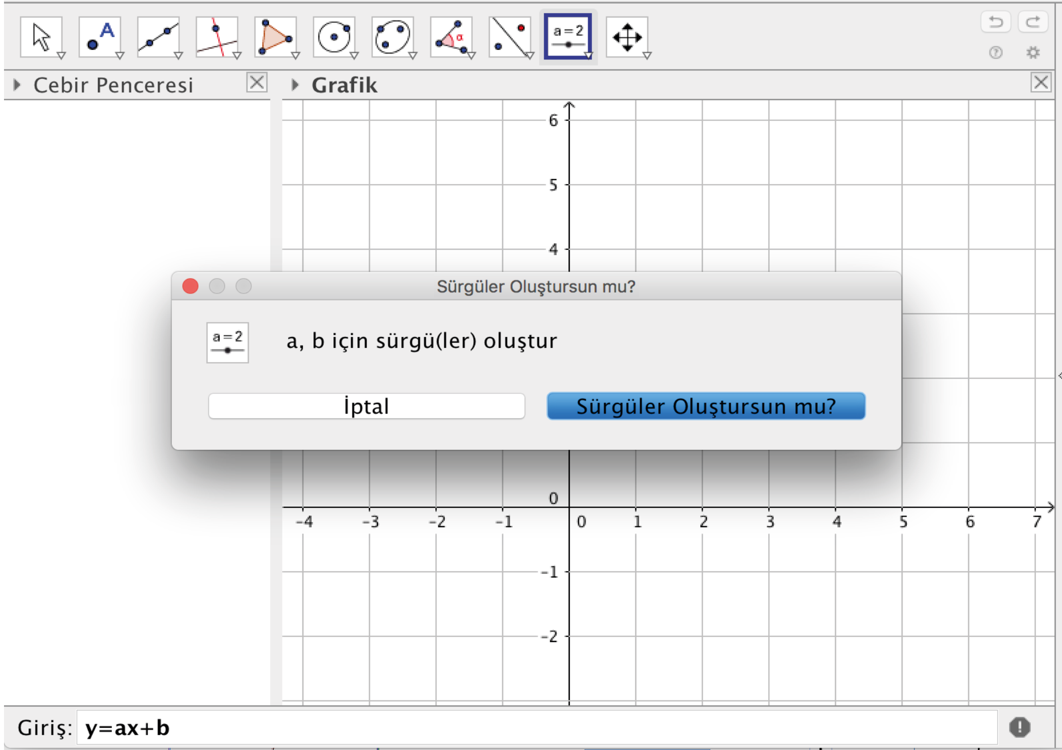
Örnek 74

$f(x) = ax + b$ şeklinde verilen bir doğrusal fonksiyonun grafiğini bir matematik yazılımı olan GeoGebra programı ile çizerek a ve b katsayıları ile fonksiyonun grafiği arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

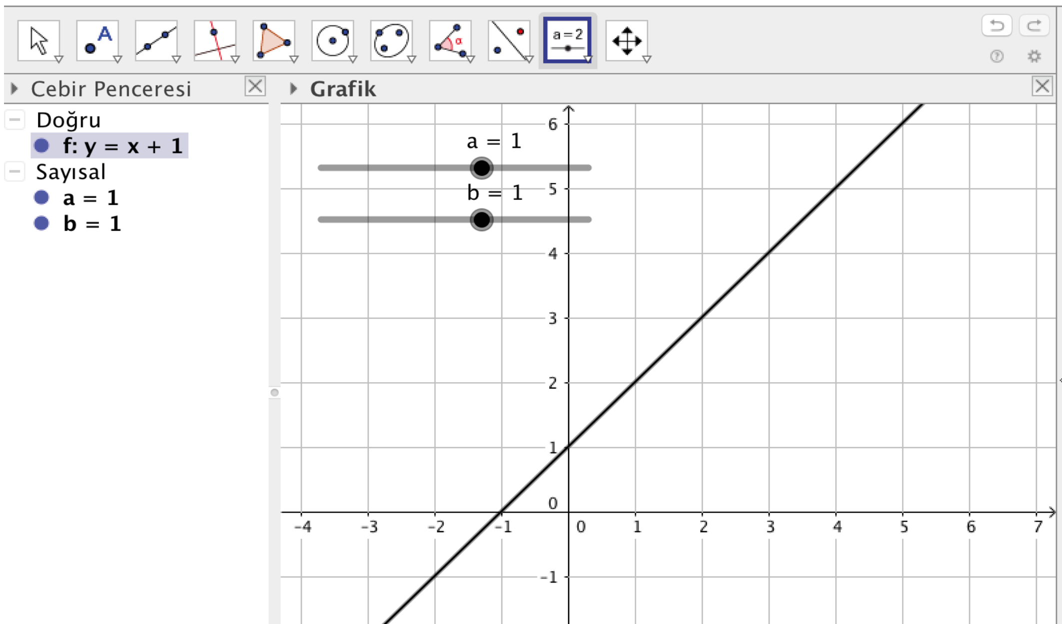


Çözüm

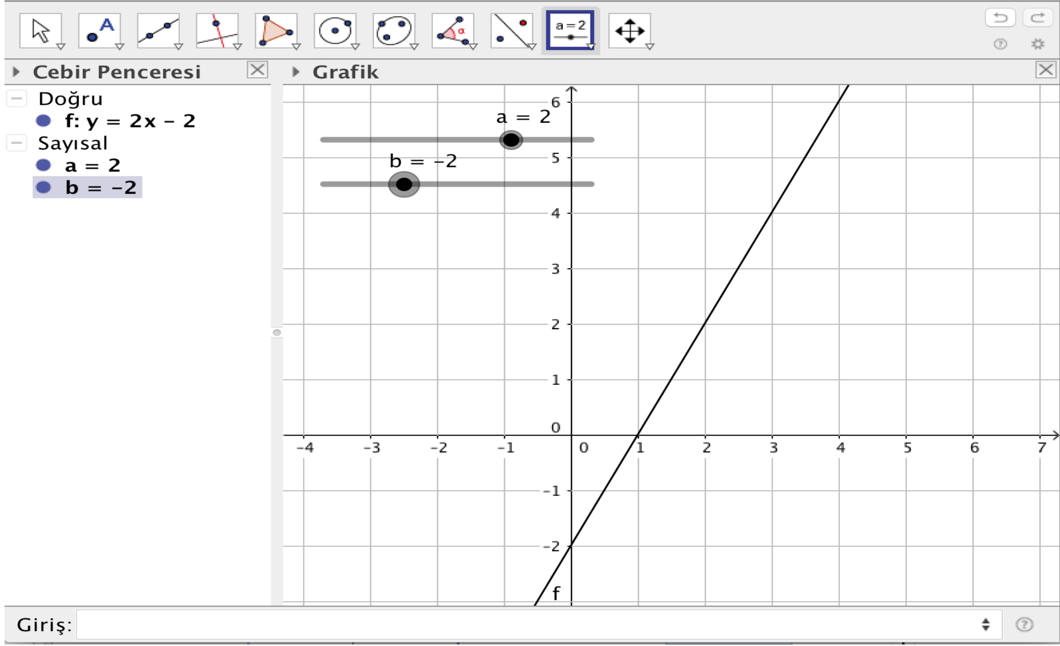
GeoGebra programını açınız. Giriş ekranına $y = ax + b$ yazınız ve Enter tuşuna basınız. Ekrana gelen kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" sekmesini seçiniz.



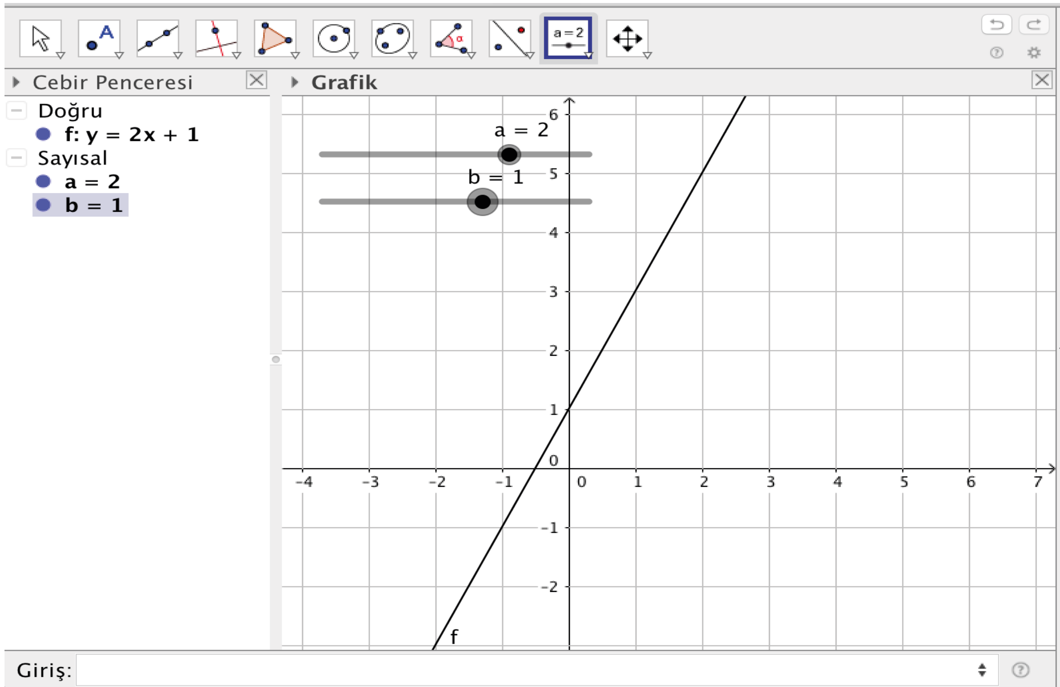
Bu işlemler yapıldığında aşağıdaki gibi bir grafik oluşacaktır.



a sürgüsünde siyah nokta hareket ettirilerek doğruda nasıl bir değişim meydana geldiği gözlemlenir. $a = 2$ ve $b = -2$ olduğunda grafik aşağıdaki gibi görünmektedir.



Sadece a değeri değiştirildiğinde fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın değişmediği görülür. b sürgüsünde siyah nokta hareket ettirildiğinde fonksiyonun grafiğinin x ve y eksenlerini kestiği noktaların değiştiği görülür. $b = 1$ için grafik aşağıdaki gibidir.



Sonuç olarak $f(x) = ax + b$ şeklinde verilen bir doğrusal fonksiyonun grafiğinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar, a ve b katsayılarının değerlerine bağlı olarak değişmektedir.



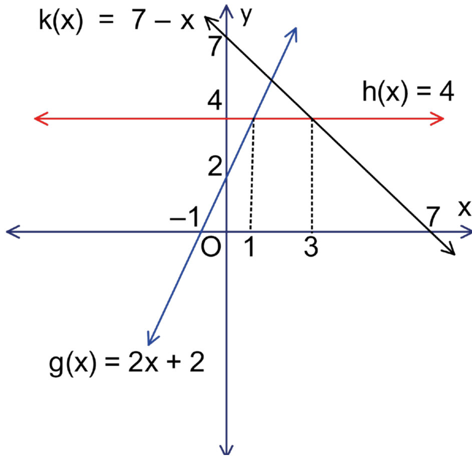
Örnek 75

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & 1 \le x \le 3 \text{ ise} \\ 7-x, & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

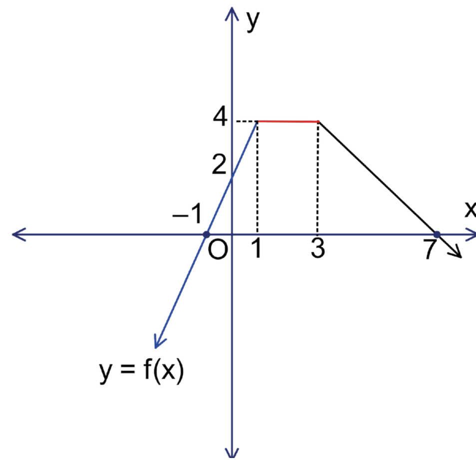


Çözüm

Önce f fonksiyonu $g(x) = 2x+2$, $h(x) = 4$ ve $k(x) = 7-x$ olmak üzere üç ayrı fonksiyona ayrılarak bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.



g fonksiyonunun $(-\infty, 1)$ aralığındaki parçası, h fonksiyonunun $[1, 3]$ aralığındaki parçası ve k fonksiyonunun $(3, \infty)$ aralığındaki parçası alınarak f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.





ALIŞTIRMALAR

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = x+5$ **b)** $h(x) = 2x-8$

c) $g(x) = 6-3x$ **ç)** $m(x) = \frac{3}{4}x - 9$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x+12$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

3. $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 1 \le x < 2 \text{ ise} \\ 3, & 2 \le x \le 3 \text{ ise} \\ 4, & 3 < x \le 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

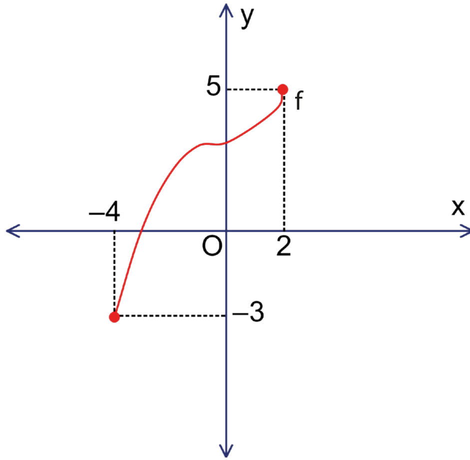
a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \ge 3 \text{ ise} \\ 6, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \text{ ise} \\ 2x-1, & -1 \le x < 4 \text{ ise} \\ 7, & x \ge 4 \text{ ise} \end{cases}$

10.2.1.3. Grafiği Verilen Fonksiyonlar ile İlgili Problemler



Örnek 76



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bularak bu fonksiyonun alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerleri bulunuz.



Çözüm

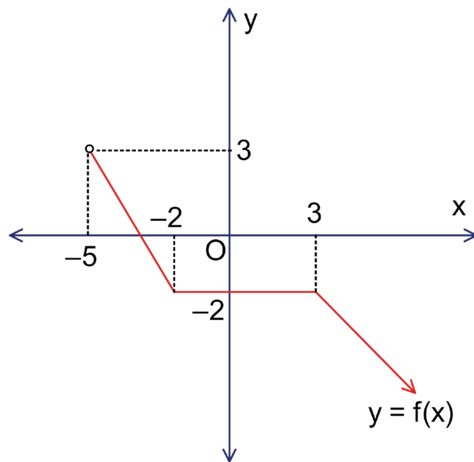
Grafiği verilen bir fonksiyonun tanım kümesi, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların birinci bileşenlerinin (apsis) oluşturduğu kümedir. Buradan fonksiyonun tanım kümesi $[-4, 2]$ dır.

Grafiği verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların ikinci bileşenlerinin (ordinat) oluşturduğu kümedir. Buradan fonksiyonun görüntü kümesi $[-3, 5]$ dır.

Ayrıca bu grafikte fonksiyonun alabileceği en büyük değer, görüntü kümesinin en büyük elemanı olan 5; en küçük değer ise görüntü kümesinin en küçük elemanı olan -3 tür.



Örnek 77



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

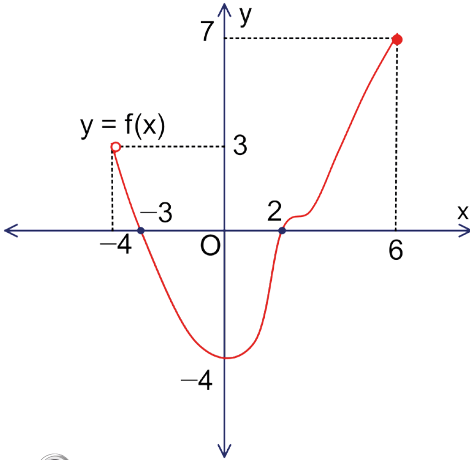


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi bu fonksiyonun grafiğinin geçtiği noktaların apsislerinden, görüntü kümesi bu fonksiyonun grafiğinin geçtiği noktaların ordinatlarından oluşur. Buradan fonksiyonun tanım kümesi $(-5, \infty)$, görüntü kümesi $(-\infty, 3)$ dır.



Örnek 78



Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulup bu fonksiyonun **en büyük** ve **en küçük** değerlerini bulunuz.

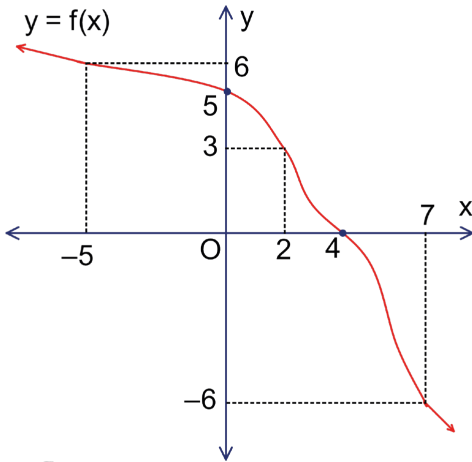


Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesi $(-4,\ 6]$ ve görüntü kümesi $[-4,\ 7]$ olur. Fonksiyonun en büyük değeri 7, en küçük değeri -4 olur.



Örnek 79



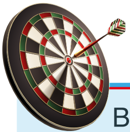
Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\dfrac{f(2)-f(7)+f(-5)}{f(0)+f(4)}$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$f(a)$ değerinin bulunabilmesi için x eksenindeki a noktasından fonksiyon grafiğine doğru bu eksene dik bir doğru parçası çizilir. Bu doğrunun grafiği kestiği noktadan y eksenine çizilen dik doğrunun y eksenini kestiği nokta $f(a)$ nın değeridir. Buna göre
$f(2)=3$, $f(7)=-6$, $f(-5)=6$, $f(0)=5$, $f(4)=0$ olur.

Buradan $\dfrac{f(2)-f(7)+f(-5)}{f(0)+f(4)}=\dfrac{3-(-6)+6}{5+0}=\dfrac{15}{5}=3$ olur.



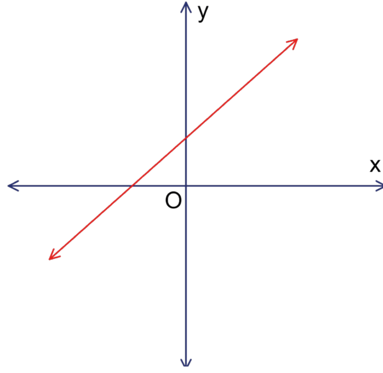
Bilgi

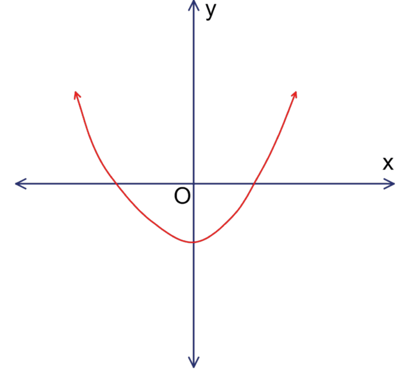
Bir fonksiyon grafiğinde düşey/dikey doğru testi kullanılarak fonksiyonun x ekseni üzerinde tanımlı olduğu her bir noktadan y eksenine paralel çizilen doğrular, grafiği yalnızca bir noktada keser. Bu doğrular, grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik bir fonksiyonun grafiği değildir.

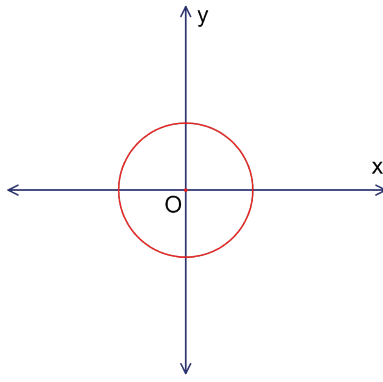


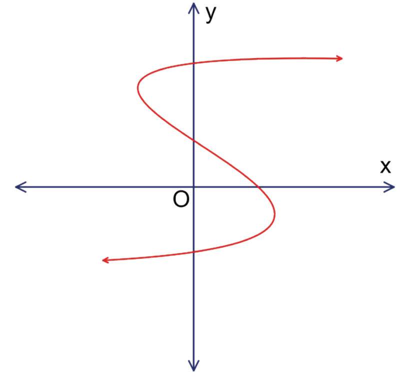
Örnek 80

Aşağıda verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediklerini bulunuz.





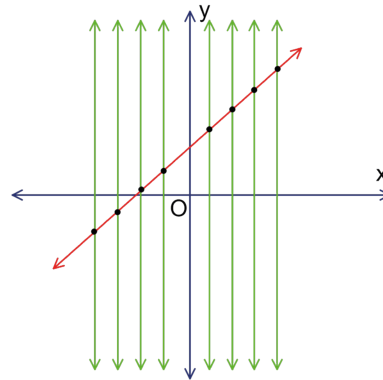




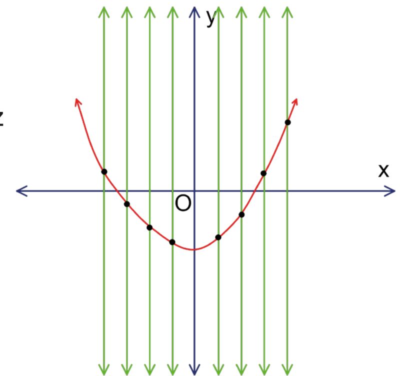


Çözüm

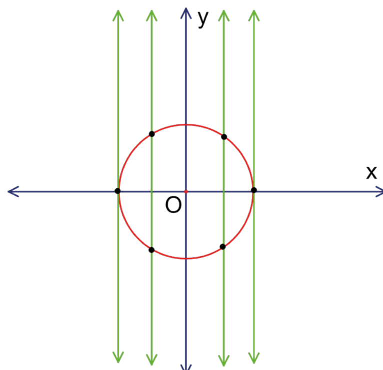
y eksenine paralel çizilen doğrulardan her biri grafiği yalnız bir noktada kes-tiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiğidir.



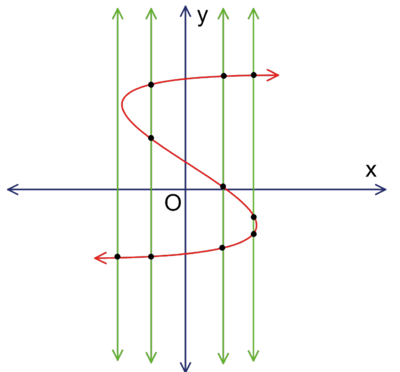
y eksenine paralel çizilen doğrulardan her biri grafiği yalnız bir noktada kes-tiğinden grafik, bir fonksiyonun grafiğidir.



y eksenine paralel çizilen doğrulardan en az bir tanesi grafiği birden fazla noktada kestiğinden grafik, bir fonk-siyonun grafiği **değildir**.



y eksenine paralel çizilen doğrulardan en az bir tanesi grafiği birden fazla noktada kestiğinden grafik, bir fonk-siyonun grafiği **değildir**.





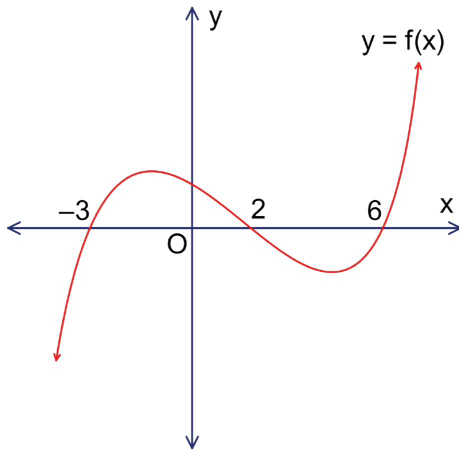
Bilgi

$f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarından biri x_1 ise bu fonksiyonun grafiği $(x_1,\ 0)$ noktasından geçer ve x eksenini $(x_1,\ 0)$ noktasında keser.

Bir fonksiyonun grafiğinde $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarına **f in sıfırları** denir. Grafik x eksenini kesmiyorsa $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılarda çözümü yoktur.



Örnek 81



Yanda grafiği verilen gerçek sayılarda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerini (f nin sıfırlarını) bulunuz.

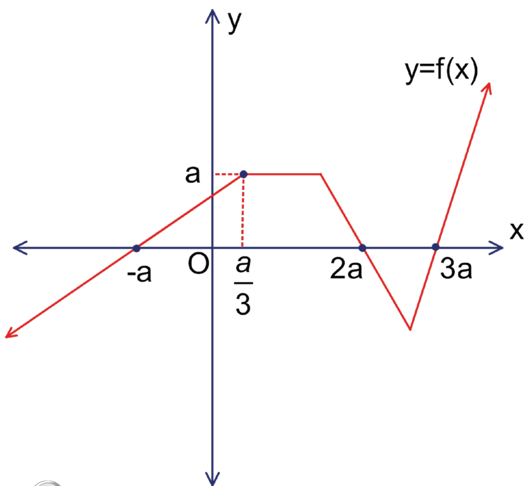


Çözüm

Koordinat düzleminde grafiğin x eksenini kestiği noktalar $(-3,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$ dır. Buradan fonksiyonun sıfırlarının bu noktaların apsisleri olan $-3,\ 2,\ 6$ olduğu görülür.



Örnek 82



Yanda grafiği verilen gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun sıfırlarının toplamı $3a + 12$ ise a değerini bulunuz.



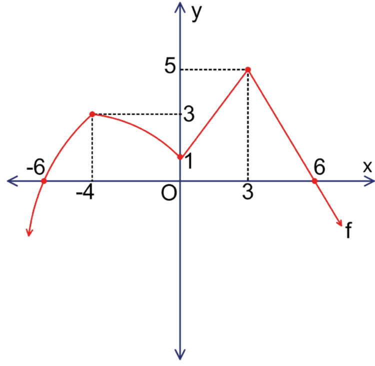
Çözüm

Koordinat düzleminde grafiğin x eksenini kestiği noktalar, $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerleridir. Bu değerler toplamı $-a + 2a + 3a = 4a$ olur. $4a = 3a + 12 \Rightarrow a = 12$ olur.



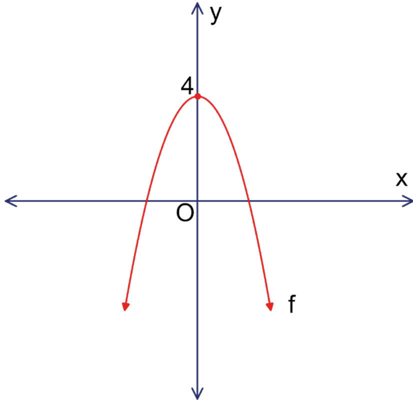
ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda grafiği verilen, gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

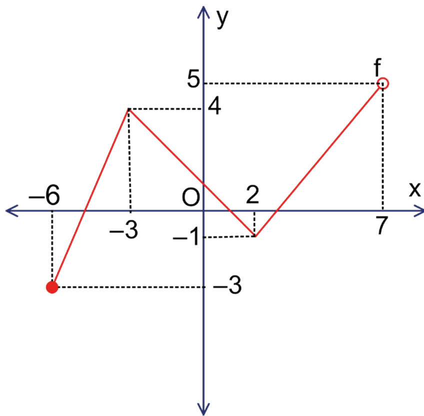


2. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a)

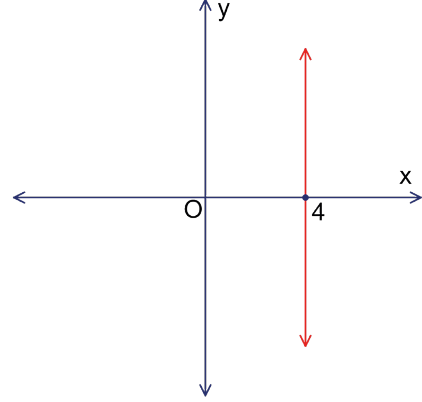


b)

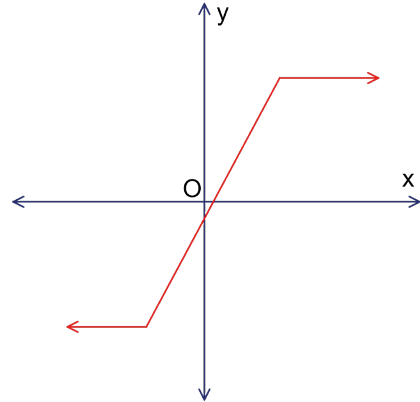


3. Aşağıda verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediğini bulunuz.

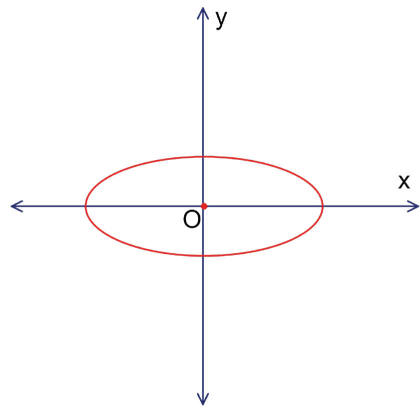
a)



b)



c)



10.2.1.4. Doğrusal Fonksiyonlarla Modellenebilen Günlük Hayat Durumları

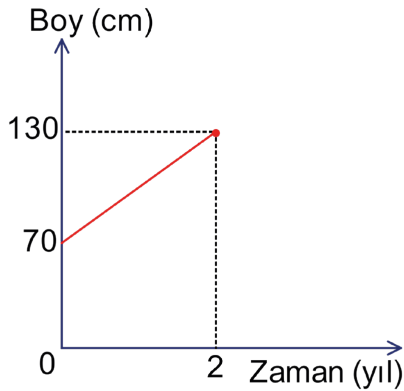


Örnek 83

70 cm uzunluğunda dikilip sabit hızla uzayan bir fidanın boyu, ikinci yılın sonunda 130 cm ye ulaşmıştır. Bu fidanın yıllara göre uzunluğunu gösteren bir doğrusal fonksiyon yazıp ilk 2 yıl için zaman-boy grafiğini çiziniz. Bu fidanın dikildikten 5 yıl sonraki uzunluğunun kaç cm olacağınızı bulunuz.



Çözüm



x geçen yıl sayısı olmak üzere $f(x) = ax + b$ bitki boyunu veren fonksiyon olsun.

$f(x) = ax + b$ fonksiyonu $(0, 70)$ ve $(2, 130)$ noktalarını sağlar.

Aynı zamanda bu iki nokta birleştirilerek yandaki grafik oluşturulabilir. $f(x) = ax + b$ fonksiyonunda

$x = 0$ için $f(0) = a \cdot 0 + b = 70$ olup buradan $b = 70$ olur.

$x = 2$ için $f(2) = a \cdot 2 + b = 130$ olup buradan $a = 30$ olur.

a ve b değerleri fonksiyonda yerine yazılırsa

$f(x) = 30x + 70$ olur. Bu fidanın dikildikten 5 yıl sonraki boyunun uzunluğu $f(5) = 30 \cdot 5 + 70 = 150 + 70 = 220$ cm olur.



Örnek 84

Sabit hızla hareket eden bir aracın deposunda 60 litre yakıt vardır. Her bir saatte aynı miktar yakıt tüketen bu araç, 2 saatte 12 litre yakıt tüketerek yol almaktadır. Buna göre yolculuk boyunca deposuna hiç yakıt takviyesi yapmayan bu aracın deposundaki yakıtın kaçıncı saatin sonunda biteceğini bularak bu aracın ilk 10 saat için yakıt değişiminin zamana bağlı grafiğini çiziniz.



Çözüm

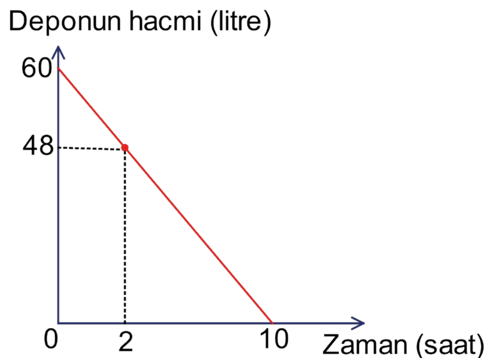
x geçen zaman (saat) olmak üzere birim zamandaki yakıt değişimi sabit olduğundan depoda kalan yakıt-miktarını veren foksiyon $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonu olsun.

$f(x) = ax + b$ doğrusal denkleminde $(0, 60)$ ve $(2, 48)$ noktaları fonksiyonu sağlar.

$x = 0$ için $f(0) = a \cdot 0 + b = 60$ olup buradan $b = 60$ olur.

$x = 2$ için $f(2) = a \cdot 2 + b = 48$ olup buradan $a = -6$ olur.

a ve b değerleri fonksiyonda yerine yazılırsa $f(x) = -6x + 60$ bulunur. Depodaki yakıtın tamamen bitmesi için $f(x) = 0$ olmalıdır. $f(x) = -6x + 60 = 0$ denkleminin çözümünden $6x = 60$ ve $x = 10$ olur. Buna göre 10. saatin sonunda aracın yakıtı biter. Bulunan bu verilere göre bu aracın deposunda kalan yakıt miktarının zamana bağlı grafiği aşağıdaki gibidir.





Örnek 85

2010 yılı ölçümlerine göre Çiçekli ve Yeniyayla beldelerine ait aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

- Çiçekli beldesinin ekili tarım arazisi 250 hektardır ve bu alan her yıl 20 hektar artmaktadır.
- Yeniyayla beldesinin ekili tarım arazisi 330 hektardır ve bu alan her yıl 10 hektar artmaktadır.

Yukarıda verilen bilgilerden hareketle yıllara göre bu beldelerdeki ekili tarım arazisini veren birer fonksiyon yazıp aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bu beldelerin ekili tarım arazilerinin alanlarının hangi yılda eşit olacağını bulunuz.

b) Bu iki beldeye ait ekili tarım arazilerinin alanlarının yıllara göre değişim grafiğini çiziniz.

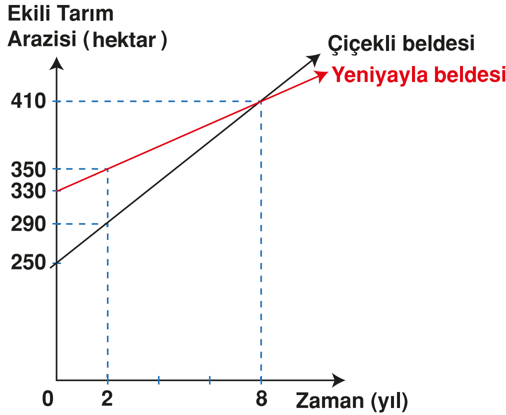


Çözüm

Çiçekli beldesinin ekili tarım arazisi bir yılda 20 hektar arttığından x yılda 20x hektar artar. 2010 yılındaki 250 hektarlık ekili tarım arazisine 20x eklenerek Çiçekli beldesinin ekili tarım arazisinin alanını geçen yıllara göre veren fonksiyon $f(x) = 250 + 20x$ olur. Aynı şekilde Yeniyayla beldesinin ekili tarım arazisini veren fonksiyon ise $g(x) = 330 + 10x$ olur.

a) 2010 yılından t yıl sonra beldelerin ekili tarım arazilerinin alanlarının eşit olduğu düşünülürse $f(t) = g(t)$ olmalıdır. Buradan $20t + 250 = 10t + 330 \Rightarrow 20t - 10t = 330 - 250 \Rightarrow 10t = 80 \Rightarrow t = 8$ olur. Buradan 8 yıl sonra yani $2010 + 8 = 2018$ yılında beldelerin ekili tarım arazilerinin alanları eşit olacaktır.

b) Verilen bilgilere göre bu iki beldenin yıllara göre ekili tarım arazilerini veren grafik aşağıdaki gibidir.





ALIŞTIRMALAR

1. Bilgi: Hava sıcaklığı, deniz seviyesinden yukarıya doğru çıkıldığında her 200 metrede 1 °C azalmaktadır.

Hava sıcaklığının 30 °C olduğu Nevşehir'e turistik amaçla giden Çağrı, çevreyi daha iyi gözlemleyebilmek için bir balon turuna katılıyor. Çağrı'nın bindiği balon dikey bir şekilde 800 metre yukarıya doğru havalanarak duruyor. Buna göre bu balonunun yüksekliğine bağlı hava sıcaklığını veren fonksiyon yazarak yükseklik-hava sıcaklığı grafiğini çiziniz.

2. Boyları 15 ve 20 cm olan iki farklı mumdan uzun olan 40, kısa olan 60 dakikada yanmaktadır. Verilen bu bilgiye göre

a) Bu iki mumdan her birine ait zamana bağlı boy uzunluklarını veren birer fonksiyon yazınız.

b) Aynı anda yakılan bu mumların boylarının kaçıncı dakikada eşit olacağını bulunuz.

c) Bu mumların boylarındaki değişimin zamana bağlı grafiğini çiziniz.

10.2.2. İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi

Terimler ve Kavramlar
- Fonksiyonların Bileşkesi
- Fonksiyonun Tersi
- Yatay Doğru Testi

Sembol ve Gösterimler
- fog , f^{-1}



Neler Öğreneceksiniz?

- Bire bir ve örten fonksiyonlarla ilgili uygulama yapabilmeyi,
- Fonksiyonlarda bileşke işlemi ile ilgili işlem yapabilmeyi,
- Bir fonksiyonun tersini bulabilmeyi öğreneceksiniz.

10.2.2.1. Bire Bir ve Örten Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar



Bilgi

Verilen fonksiyonun grafiğini kesecek şekilde x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu paralel doğrular grafiği bir noktada kesiyorsa fonksiyon **bire bir fonksiyondur** denir. Yapılan bu işleme **yatay doğru testi** denir.

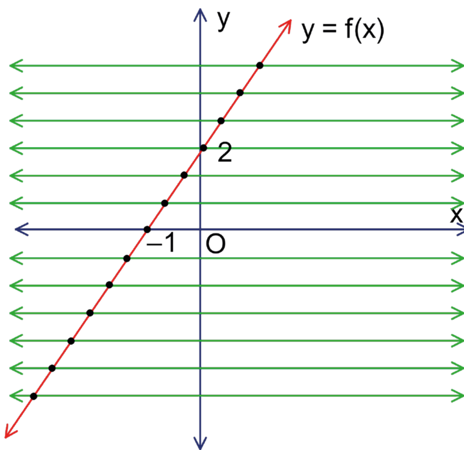


Örnek 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 2$ fonksiyonunun bire bir ve örtenliğini inceleyiniz ve fonksiyonu eşleştirme kuralını yazınız.



Çözüm



$f(x) = 2x + 2$ fonksiyonu, tanım ve görüntü kümesine göre yanda verilen şekildeki gibi çizilebilir. Daha sonra y eksenine dik olacak şekilde yatay doğrular çizilir. Bu doğruların her biri grafiği tek bir noktada kestiği için $f(x) = 2x + 2$ fonksiyonu bire birdir.

Fonksiyonun örtenliği ile ilgili bu durum aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 2 \\ y - 2 &= 2x \\ x &= \frac{y-2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $x = \frac{y-2}{2}$ şeklinde $\exists x \in \mathbb{R}$ elde edilebilir. Buradan değer kümesinden her y gerçek sayısına karşılık tanım kümesinden bu kuralla bir x seçilebilir. Öyleyse değer kümesinde eşlenmemiş eleman kalmaz, dolayısıyla f örtendir.

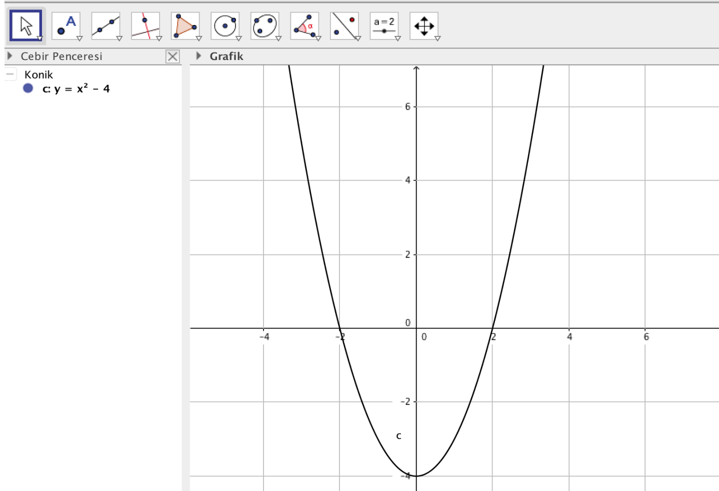


Örnek 2

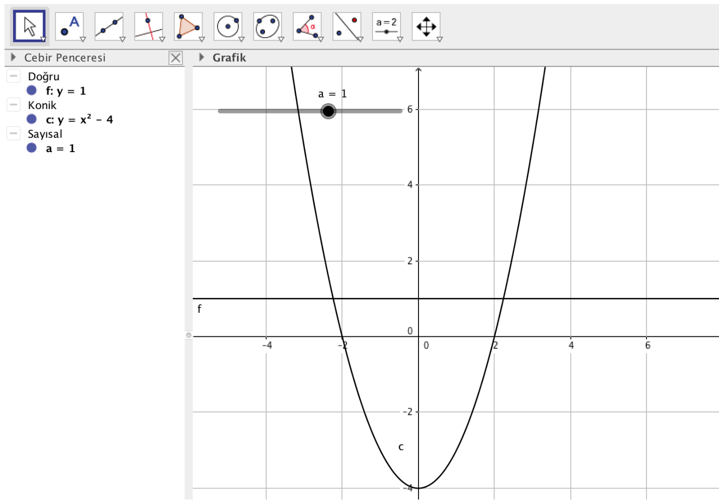
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun bire bir ve örten olup olmadığını GeoGebra programı yardımıyla inceleyiniz.



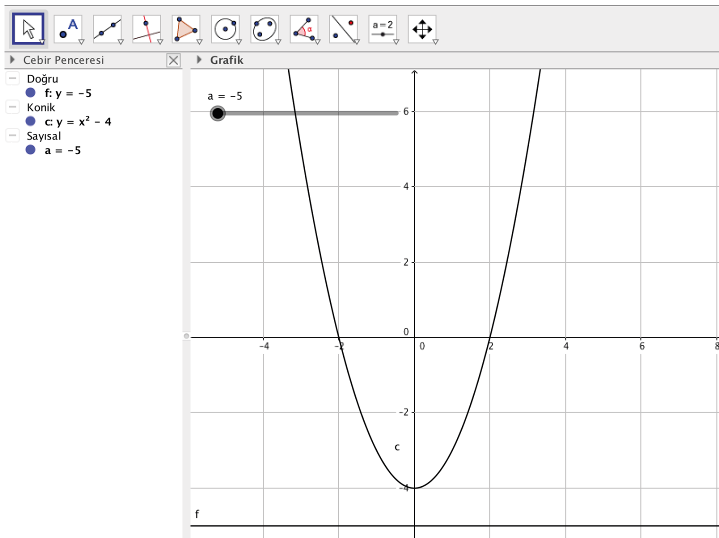
Çözüm



GeoGebra programını açınız. Cebir penceresinin alt kısmında yer alan “Giriş” ekranına $y = x^2 - 4$ yazınız ve Enter tuşuna basınız. Böylece ekranda $f(x) = x^2 - 4$ grafiği oluşacaktır.



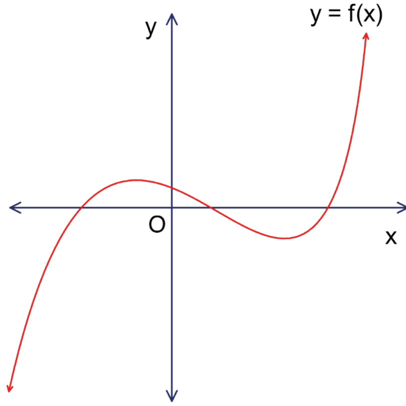
“Giriş” ekranına $y = a$ yazınız ve Enter tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda “Sürgüler Oluşturulsun mu?” butonuna basınız. Sürgüyü sağa sola oynatınca $y = a$ doğrusunun bazı durumlarda grafiği 2 farklı noktada kestiği görülür. Örneğin yandaki şekilde a sürgüsü 1 in üzerindeyken $y = a$ doğrusunun farklı iki noktada grafiği kestiği görülmektedir. Bu durumda $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu bire bir değildir.



Sürgüyü -4 ten küçük olan herhangi bir değere getirince $y = a$ doğrusunun $f(x) = x^2 - 4$ grafiğini kesmediği görülür. Bu durumda fonksiyon, y ekseni üzerindeki -4 ten küçük değerleri alamamaktadır (görüntü kümesi $\mathbb{R}$ olmamakta). Buradan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun örten fonksiyon olmadığı görülür.



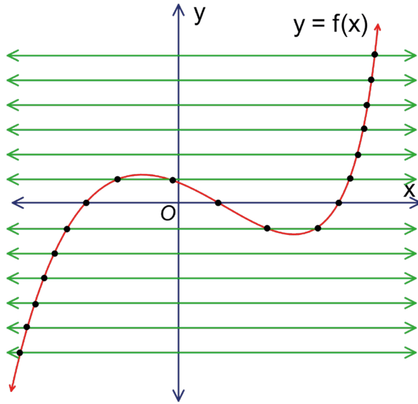
Örnek 3



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyon grafiği yanda verilmiştir. Yatay doğru testi ile bu fonksiyonun bire bir ve örtenliğini inceleyiniz.



Çözüm



y eksenine dik olacak şekilde çizilen yatay doğrulardan bazıları grafiği birden fazla noktada kestiği için bu fonksiyon **bire bir değildir**.

Çizilen yatay doğrular fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kestiği için bu fonksiyon **örtendir.**



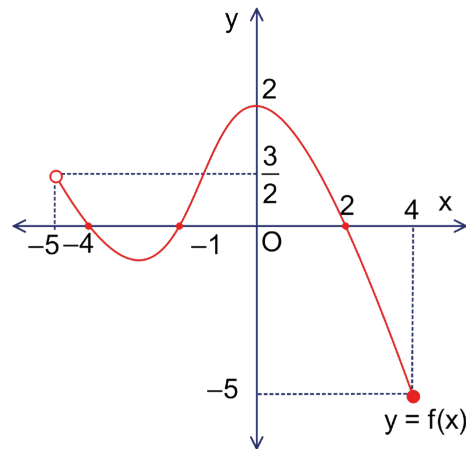
ALIŞTIRMALAR

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun grafiğini çizerek bire bir ve örtenliğini yatay doğru testi ile inceleyiniz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun bire bir ve örtenliğini GeoGebra programında sürgüler oluşturarak yatay doğru testi ile inceleyiniz.

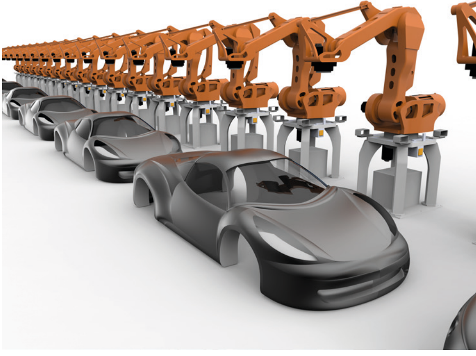
3. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizerek bire bir ve örtenliğini yatay doğru testi ile inceleyiniz.

4.



Yukarıda verilen fonksiyon grafiği için $f: (-5,\ 4] \to [-5,\ 2]$ fonksiyonunun bire bir ve örtenliğini yatay doğru testi ile inceleyiniz.

10.2.2.2. Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi



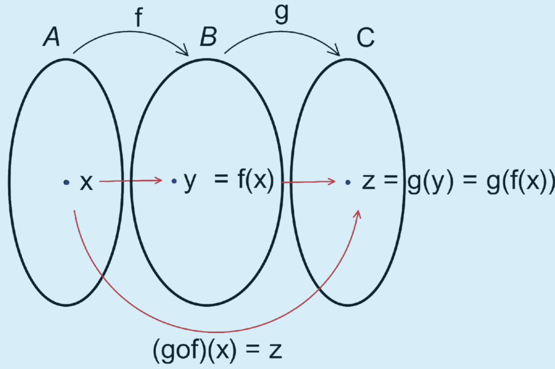
İki fonksiyonun bileşkesi birbiriyle bağlantılı, arka arkaya yapılan iki işlem gibidir.

Örneğin x Türk lirasına üretilen bir otomobilin bayilere geliş fiyatı $y = f(x)$ fonksiyonu şeklinde, bu otomobilin kullanıcılara satış fiyatı $z = g(y)$ fonksiyonu şeklinde ifade edilirse x Türk lirasına üretilen bir otomobilin kullanıcıya maliyetini gösteren fonksiyon, $z = g(y) = g(f(x))$ ile tanımlanabilir.



Bilgi

A, B, C boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \to B,\ g : B \to C$ fonksiyonları verilsin. A kümesinin elemanlarını f ve g fonksiyonları yardımıyla C kümesinin elemanları ile eşleştiren fonksiyona **f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu** denir ve $(gof)(x)$ şeklinde gösterilir. Burada f fonksiyonunun değer kümesi ile g fonksiyonunun tanım kümesi eşittir.



gof fonksiyonu f nin tanım kümesindeki herhangi bir x değerini, g nin değer kümesindeki g(f(x)) biçimindeki bir z ile eşler. Bu ifade sembollerle

$f : A \to B,\ g : B \to C$ olmak üzere

$gof = \{(x, z) | x \in A \text{ ve } z = g(f(x)) \in C\}$

biçiminde gösterilebilir.



Örnek 4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 1$ olduğuna göre

a) $(fog)(x)$ ve $(fog)(2)$ değerini bulunuz.

b) $(gof)(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

a) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 2x + 1 + 2 = 2x + 3$ olur.

Bu durumda $(fog)(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ olur.

b) 1.yol

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 2 \cdot (x + 2) + 1 = 2x + 5$ olur. Bu durumda $(gof)(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$ olur.

2.yol

(gof)(x) bulunmadan $(gof)(2) = g(f(2))$ ile de sonuca ulaşılabilir. Buradan $f(2) = 2 + 2 = 4$ olur. Bulunan değer g de yerine yazılarak $g(f(2)) = g(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ bulunur.



Örnek 5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3x + 2$ ise

a) $(fog)(x)$ i bulup grafiğini çiziniz.

b) $(gof)(x)$ i bulup grafiğini çiziniz.



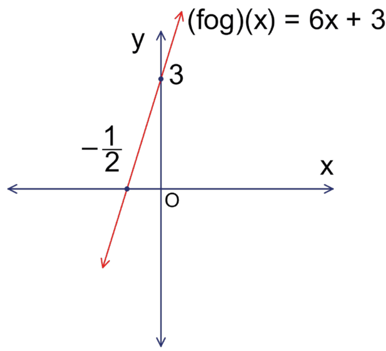
Çözüm

a) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2 \cdot (3x+2) - 1 = 6x + 3$ olur.

$(fog)(x) = 6x + 3$ eşitliği $y = 6x + 3$ şeklinde ifade edilirse

$x = 0$ için $y = 6 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3$ olur.

$y = 0$ için $0 = 6x + 3 \Rightarrow -3 = 6x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ olur.

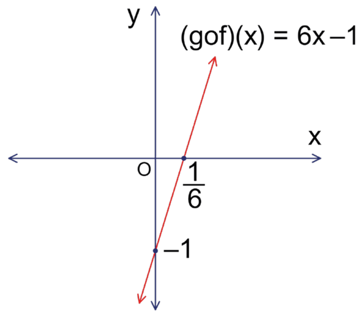


b) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 3 \cdot (2x-1) + 2 = 6x - 1$ olur.

$(gof)(x) = 6x - 1$ eşitliği $y = 6x - 1$ şeklinde ifade edilirse

$x = 0$ için $y = 6 \cdot 0 - 1 \Rightarrow y = -1$ olur.

$y = 0$ için $0 = 6x - 1 \Rightarrow 1 = 6x \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ olur.





İpucu

- Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur. Yani herhangi iki f ve g fonksiyonu için $fog = gof$ olmak zorunda değildir.
- Bir f fonksiyonun birim fonksiyon ile bileşkesi yine f fonksiyonudur.
  $f o I = I o f = f$ olur.



Örnek 6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 1$ fonksiyonları veriliyor.
Verilen bu fonksiyonlar için $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm

$(fog)(x) = f(g(x)) = g(x) + 3 = (3x - 1) + 3 = 3x + 2$,

$(gof)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) - 1 = 3 \cdot (x + 3) - 1 = 3x + 9 - 1 = 3x + 8$ olur.

Buradan $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ olduğu görülür.

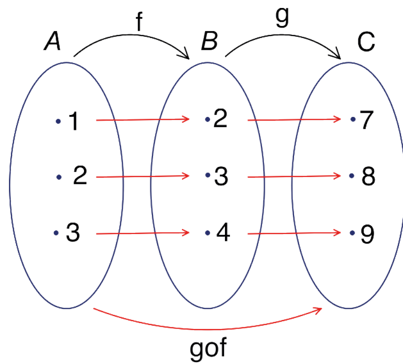


Örnek 7

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ve $g = \{(2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$ ise gof fonksiyonunun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.



Çözüm



Verilen fonksiyonlar Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirse gof fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{1, 2, 3\}$ ve görüntü kümesi $C = \{7, 8, 9\}$ bulunur.

Bu durumda $gof = \{(1, 7), (2, 8), (3, 9)\}$ olur.



Örnek 8

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 5$ olduğuna göre $(fog)(a) = 2$ eşitliğini sağlayan a değerini bulunuz.



Çözüm

$(fog)(a) = 2 \Rightarrow f(g(a)) = 2$

$\Rightarrow g(a) - 3 = 2$

$\Rightarrow g(a) = 5$

$\Rightarrow a - 5 = 5$

$\Rightarrow a = 10$ olur.



Örnek 9

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + k$ fonksiyonu veriliyor. $(fof)(x) = ax + 18$ olduğuna göre a ve k değerlerini bulunuz.



Çözüm

$$(fof)(x) = ax + 18 \Rightarrow f(f(x)) = ax + 18$$
$$f(2x + k) = ax + 18$$
$$2 \cdot (2x + k) + k = ax + 18$$
$$4x + 3k = ax + 18 \Rightarrow a = 4 \text{ ve } 3k = 18 \text{ ise } k = 6 \text{ olur.}$$



Örnek 10

$\max\{a, b\}$: a ve b elemanlarından büyük olan, $\min\{a, b\}$: a ve b elemanlarından küçük olan olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\left\{\frac{1}{x}, \sqrt{x}\right\}$ ve $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \min\left\{\frac{2}{x}, \frac{x}{3}\right\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(fog)\left(\frac{5}{2}\right)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$(fog)\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(\min\left\{\frac{2}{\frac{5}{2}}, \frac{\frac{5}{2}}{3}\right\}\right) = f\left(\min\left\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= \max\left\{\frac{1}{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\} = \frac{5}{4} \text{ olur.}$$



Örnek 11

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3 \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 \\ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x \end{array}\right\}$$ fonksiyonları veriliyor. $(fo(goh))(x) = ((fog)oh)(x)$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm

$$(fo(goh))(x) = f(goh(x))$$
$$= f(4x^2) \qquad \left[(goh)(x) = g(h(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2\right]$$
$$= 4x^2 + 3$$
$$((fog)oh)(x) = (fog)(h(x))$$
$$= (fog)(2x) \qquad \left[(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3\right]$$
$$= (2x)^2 + 3$$
$$= 4x^2 + 3$$

Buradan $fo(goh) = (fog)oh$ olduğu görülür.



İpucu

Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Bu özellik $fo(goh) = (fog)oh$ olarak ifade edilir.



Bilgi

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları bire bir ise $gof: A \rightarrow C$ fonksiyonu da bire birdir.



Buluyorum

$gof: A \rightarrow C$ olduğundan $x_1, x_2 \in A$ alınsın.

$(gof)(x_1) = (gof)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g fonksiyonu bire bir olduğundan)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f fonksiyonu bire bir olduğundan)

Bu durumda gof fonksiyonu bire bir fonksiyondur.



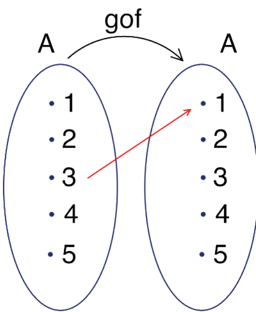
Örnek 12

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlı ve bire bir olan f ile g fonksiyonları veriliyor. $(gof)(3) < 2$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı gof fonksiyonu olduğunu bulunuz.



Çözüm

Her iki fonksiyon da A kümesi üzerinde tanımlı olduğundan $gof: A \rightarrow A$ şeklindedir.
f ve g fonksiyonları bire bir olduğundan gof fonksiyonu da bire birdir.
$(gof)(3) < 2$ ise $(gof)(3) = 1$ olur.

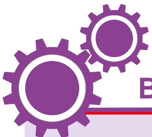


gof fonksiyonu bire bir olduğundan tanım kümesi olan
A daki 1 in görüntüsü, değer kümesi olan A da 1 hariç kalan 4 tane elemandan birisi olabilir.
A daki 2 nin görüntüsü, değer kümesi olan A da kalan 3 tane elemandan birisi olabilir.
A daki 4 ün görüntüsü, değer kümesi olan A da kalan 2 tane elemandan birisi olabilir.
A daki 5 in görüntüsü, değer kümesi olan A da kalan 1 tane eleman olur.
Çarpma yoluyla sayma prensibine göre bu şartlarda $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ farklı gof fonksiyonu yazılabilir.



Bilgi

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları örten ise $gof: A \rightarrow C$ fonksiyonu da örtendir.



Buluyorum

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ örten fonksiyonlar olmak üzere,
$\forall b \in B$ için $\exists a \in A$ öyle ki $f(a) = b$ yazılabilir.
$\forall c \in C$ için $\exists b \in B$ öyle ki $g(b) = c$ yazılabilir.

Bu durumda $g(b) = c \Rightarrow g(f(a)) = c \Rightarrow (gof)(a) = c$ olur. O hâlde $c \in C$ için $(gof)(a) = c$ olacak şekilde $a \in A$ vardır ve gof **örten bir fonksiyondur.**



Örnek 13

$A \neq \varnothing$ olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

I. fog fonksiyonu bire bir ise g fonksiyonu bire birdir.

II. gof fonksiyonu örten ise g fonksiyonu örtendir.

ifadelerinin doğru olup olmadıklarını bulunuz.



Çözüm

I. $x_1, x_2 \in A$ olsun.

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (fog)(x_1) \neq (fog)(x_2)$ (fog bire bir olduğundan)

$\Rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$ ($(fog)(x) = f(g(x))$ olduğundan)

$\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

Bu durumda fog fonksiyonu bire bir iken g fonksiyonu da bire birdir.

II. gof örten ise $\forall y \in A$ için $\exists x \in A$ öyle ki $(gof)(x) = y$ olur. Bu durumda gof un değer kümesi A daki her y için gof un tanım kümesi A da, gof altındaki görüntüsü y olan en az bir tane x bulabiliriz.
$(gof)(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = y \Rightarrow g(z) = y$ ($z = f(x)$ olacak şekilde $\exists z \in A$)
f, A da tanımlı olduğundan $f(x) = z$, A nın elemanıdır. Şimdi, g nin değer kümesindeki herhangi bir y için g nin tanım kümesi olan A da bir z vardır ki $g(z) = y$ sağlanır. Buradan g örtendir.



Örnek 14

$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu, tanım kümesindeki her elemanı bu elemanın asal bölenleri sayısına götüren bir fonksiyon olarak tanımlanıyor. Buna göre

a) $(fof)(420)$ değerini bulunuz.

b) $(fof)(x) = 2$ olduğuna göre x in **en küçük** değerini bulunuz.



Çözüm

a) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ olur. Buradan 420 nin asal bölen sayısı 4 olduğundan $f(420) = 4$ olur. Bu durumda $(fof)(420) = f(f(420)) = f(4) = 1$ olur. Çünkü 4 sayısını bölen asal sayı sadece 2 sayısı olduğundan 1 tanedir.

b) $(fof)(x) = 2$ ise $f(f(x)) = 2$ olur. Bu durumda 2 tane asal böleni olan en küçük pozitif tam sayı 6 olduğundan $f(x) = 6$ seçilir. Buradan $f(x) = 6$ ise x en az $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$ olur.



Örnek 15

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

- $(fog)(x) = f(x) + g(x)$
- $f(x) = 2x - 5$

olduğuna göre $g(3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$(fog)(x) = f(x) + g(x)$

$f(g(x)) = f(x) + g(x)$

$2 \cdot g(x) - 5 = 2x - 5 + g(x)$

$g(x) = 2x$

$g(3) = 2 \cdot 3$

$g(3) = 6$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 5$ ve
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4x$ ise

a) $(fog)\left(\frac{1}{4}\right)$ değerini bulunuz.

b) $(fof)\left(\frac{1}{2}\right)$ değerini bulunuz.

c) $(gog)\left(\frac{1}{16}\right)$ değerini bulunuz.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 2$ ve
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4 + x$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıdaki fonksiyonların eşleştirme kuralını yazınız ve grafiklerini çiziniz

a) fog

b) gof

c) fof

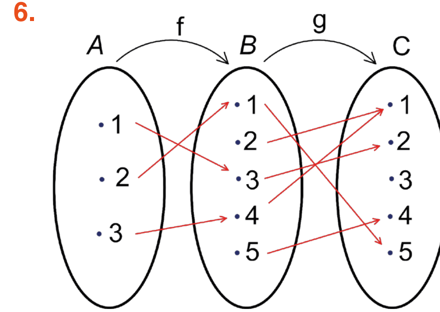
ç) gog

3. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $(fog)(x) = 3x - 1$ ve $f(x) = 3x - 1$ olarak veriliyor. Bu durumda $(\underbrace{gogogo...og}_{100 \text{ tane}})(-1)$ değerini bulunuz.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |1 - x|$ olmak üzere
$(\underbrace{fofofofo\ ...\ of}_{99 \text{ tane}})(1)$ değerini bulunuz.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x - 12|$ olduğuna göre $(fof)(a) = 4$ eşitliğini sağlayan a değerlerini bulunuz.

6.

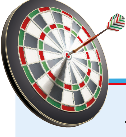


Yukarıdaki şekilde verilenlere göre gof fonksiyonunu liste yöntemi ile yazınız.

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor.
A kümesi üzerinde tanımlı yazılabilecek tüm fonksiyonlardan seçilen bir tanesinin görüntü kümesinin tek sayılardan oluşma olasılığını bulunuz.

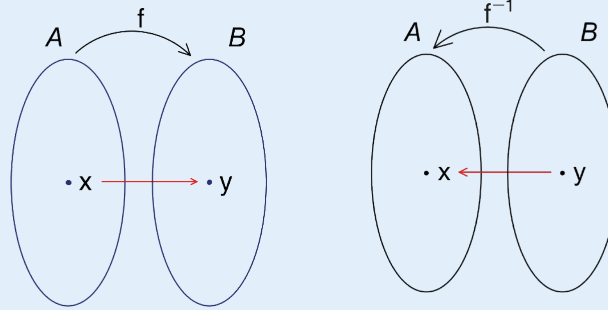
8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere
$(fog)(x) = 2 \cdot g^2(x) - 3 \cdot g(x) - 7$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-10)$ değerini bulunuz.

10.2.2.3. Fonksiyonun Tersi

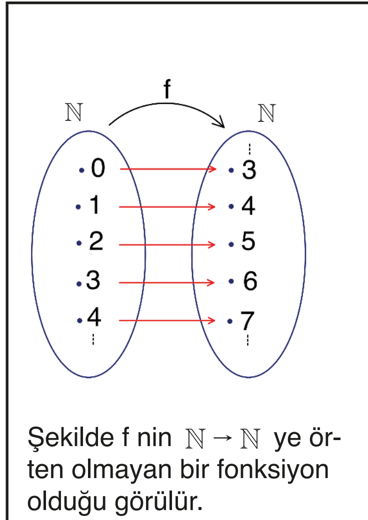


Bilgi

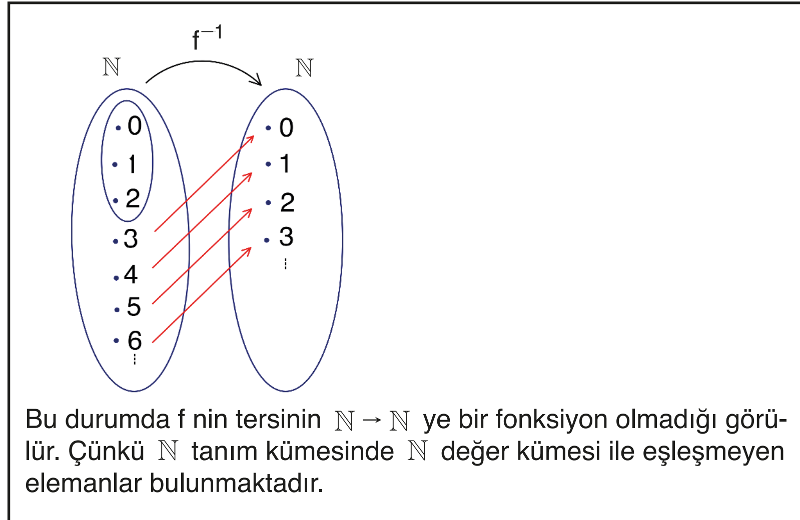
$f: A \to B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonu verilsin. $x \in A$ için $f(x) = y$ iken $f^{-1}(y) = x$ oluyorsa f^{-1} fonksiyonuna **f fonksiyonunun tersi** denir. f^{-1}, B kümesinden A kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Bu durum aşağıdaki gibi de gösterilebilir.



$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örten bir fonksiyon olmadığı için bu fonksiyonun tersi bir fonksiyon değildir. Bu durum aşağıdaki gibi incelenirse

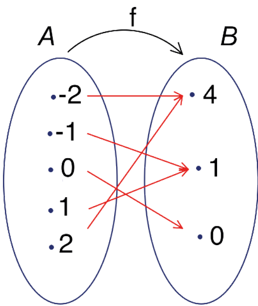


Şekilde f nin $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ye örten olmayan bir fonksiyon olduğu görülür.

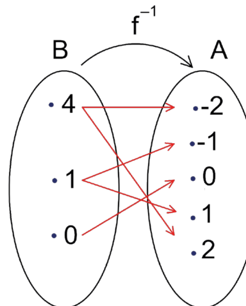


Bu durumda f nin tersinin $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ye bir fonksiyon olmadığı görülür. Çünkü $\mathbb{N}$ tanım kümesinde $\mathbb{N}$ değer kümesi ile eşleşmeyen elemanlar bulunmaktadır.

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 4\}$, $f: A \to B$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu bire bir fonksiyon olmadığı için bu fonksiyonun tersi fonksiyon değildir. Bu durum aşağıdaki gibi incelenirse



Şekilde A kümesindeki farklı iki eleman B kümesinde aynı bir elemanla eşleştiği için f nin $A \to B$ bire bir olmayan bir fonksiyon olduğu görülür.



Şekilde ise f nin tersinin $B \to A$ ya bir fonksiyon olmadığı görülür. Çünkü fonksiyon olması için gerekli olan "Tanım kümesindeki her bir eleman değer kümesinden yalnızca bir eleman ile eşlenir." koşulu ihlal edilmiştir.



İpucu

$f: A \to B$ ye olmak üzere $y = f(x)$ bire bir ve örten ise $f(x)$ fonksiyonunun tersi de fonksiyon olur.
$f: A \to B$ ise $f^{-1}: B \to A$ olur.

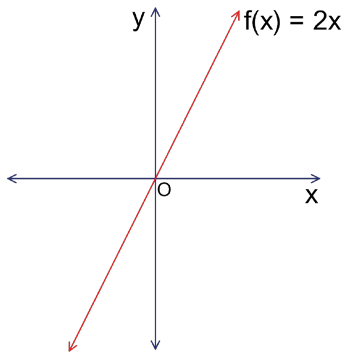


Örnek 16

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ fonksiyonunun tersinin fonksiyon olup olmadığını grafik yardımıyla bulunuz.



Çözüm



f fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir. Grafik incelendiğinde tanım kümesindeki her elemanın görüntüsünün farklı olduğu ve değer kümesinin her elemanına karşılık tanım kümesinde bir elemanın olduğu görülür. Dolayısıyla f bire bir ve örten fonksiyon olduğundan f nin tersi de bir fonksiyondur.



İpucu

Bir fonksiyonun tersinin eşleştirme kuralını bulmak için aşağıdaki adımlar izlenebilir.

I. $y = f(x)$ kuralında x yerine y, y yerine x yazılır.

II. Elde edilen eşitlikte y yalnız bırakılır.

III. Son eşitlikte y yerine $f^{-1}(x)$ yazılır.



Örnek 17

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunun tersinin eşleştirme kuralını bulunuz.



Çözüm

$y = f(x)$ kuralında x yerine y, y yerine x yazılıp elde edilen eşitlikte y yalnız bırakılır.

$y = f(x) \Rightarrow y = 3x + 5$

$\Rightarrow x = 3y + 5 \Rightarrow 3y = x - 5$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-5}{3}$ olur.

Bu eşitlikte y yerine $f^{-1}(x)$ yazılırsa $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$ olur.



Örnek 18

$f : \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\ f(x)=\frac{2x+6}{4x-8}$ fonksiyonunun tersinin eşleştirme kuralını bulunuz.



Çözüm

$y=f(x) \Rightarrow y=\frac{2x+6}{4x-8} \Rightarrow x=\frac{2y+6}{4y-8} \Rightarrow 4xy-8x=2y+6$

$\Rightarrow 4xy-2y=8x+6$

$\Rightarrow y(4x-2)=8x+6$

$\Rightarrow y=\frac{8x+6}{4x-2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{8x+6}{4x-2}$ olur.



İpucu

Uygun tanım aralıklarında verilen aşağıdaki fonksiyonlar için

- $f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ olur.
- $f(x)=ax$ ise $f^{-1}(x)=\frac{x}{a}$ olur.
- $f(x)=\frac{ax+b}{c}$ ise $f^{-1}(x)=\frac{cx-b}{a}$ olur.
- $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ olur.



Örnek 19

$f : \mathbb{R}-\{a\} \to \mathbb{R}-\{b\},\ f(x)=\frac{x+4}{x+3}$ bire bir ve örten fonksiyon olduğuna göre $a+b$ değerini bulunuz.



Çözüm

f fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan f fonksiyonunu tanımsız yapan değerin tanım kümesinde bulunmaması gerekir. f nin tanım kümesi olan $\mathbb{R}-\{a\}$ kümesindeki a değeri, paydayı sıfır yapan değer olan -3 tür.

f fonksiyonunun değer kümesi f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi olacağından $f^{-1}(x)=\frac{-3x+4}{x-1}$ fonksiyonunu tanımsız yapan (paydayı sıfır yapan) $\mathbb{R}-\{b\}$ kümesindeki b değeri 1 dir.

Buradan $a+b=-3+1=-2$ olur.



Örnek 20

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+2)=7-2x$ olmak üzere $f^{-1}(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)=y \Rightarrow f^{-1}(y)=x$ olduğundan $f(x+2)=7-2x \Rightarrow f^{-1}(7-2x)=x+2$ olur.

Buradan $f^{-1}(5)$ değerini bulmak için $7-2x$ ifadesi 5 e eşitlenerek x değeri bulunur ve bulunan değer fonksiyonda x yerine yazılır.

$7-2x=5 \Rightarrow x=1$ bulunup $f^{-1}(7-2x)=x+2$ fonksiyonunda x yerine 1 yazılırsa

$f^{-1}(7-2\cdot 1)=1+2 \Rightarrow f^{-1}(5)=3$ olur.



Örnek 21

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)^3+5$ olmak üzere $f^{-1}(13)$ değerini bulunuz.



Çözüm

1. yol

f(x) fonksiyonu verilip $f^{-1}(13)$ değeri istendiğinde $f^{-1}(x)$ fonksiyonun kuralında x yerine 13 yazılarak sonuç bulunabilir.

$$f(x)=(x-2)^3+5$$
$$y=(x-2)^3+5$$
$$x=(y-2)^3+5$$
$$x-5=(y-2)^3$$
$$\sqrt[3]{x-5}=y-2$$
$$\sqrt[3]{x-5}+2=y$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-5}+2$$
$$f^{-1}(13)=\sqrt[3]{13-5}+2=\sqrt[3]{8}+2=2+2=4 \text{ olur.}$$

2. yol

$f(x)=(x-2)^3+5\Rightarrow f^{-1}((x-2)^3+5)=x$ ve $(x-2)^3+5=13\Rightarrow(x-2)^3=8\Rightarrow x=4$ olur. Buradan $f^{-1}(13)=4$ olarak bulunur.



Örnek 22

$f:(-\infty,\ 0]\to[8,\ \infty),\ f(x)=x^2+8$ olmak üzere $f(-2)+f^{-1}(17)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(-2)=(-2)^2+8=4+8=12$

$f^{-1}(17)$ değeri için $f(x)$ fonksiyonu 17 ye eşitlenirse

$$f(x)=17$$
$$x^2+8=17$$
$$x^2=9$$

$x=-3$ veya $x=+3$ olur.

$f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi olan $(-\infty,\ 0]$ aralığında $+3$ bulunmadığından $x=-3$ olmalıdır.

Buradan $f(-2)+f^{-1}(17)=12+(-3)=9$ olur.



Örnek 23

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(2x-8)=3x+4$ ve $f^{-1}(m+2)=22$ olduğuna göre m değerini bulunuz.



Çözüm

$f^{-1}(m+2)=22$ ise $f(22)=m+2$ olur. Buradan

$2x-8=22$ ve $3x+4=m+2$,

$2x-8=22\Rightarrow 2x=30$ ve $x=15$,

$m+2=3x+4\Rightarrow m+2=3\cdot 15+4$ ve $m=47$ olur.



Örnek 24

f, tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere $f(x)=\frac{ax+15}{2x-3}$ ve $f^{-1}(x)=f(x)$ olduğuna göre $f(a)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)=\frac{ax+15}{2x-3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+15}{2x-a}$ olur.

$f^{-1}(x)=f(x)$ ise $\frac{ax+15}{2x-3}=\frac{3x+15}{2x-a}$ olur. Buradan $a=3$ olarak bulunur. a değeri fonksiyonda yerine yazılırsa $f(x)=\frac{3x+15}{2x-3}$ bulunur. Buradan $f(a)=f(3)=\frac{3\cdot 3+15}{2\cdot 3-3}=\frac{24}{3}=8$ olur.



Örnek 25

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+5$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3x-1$ olduğuna göre $(gof^{-1})(-3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$f(x)=2x+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2} \Rightarrow f^{-1}(-3)=\frac{-3-5}{2}=-4$ olur.

$(gof^{-1})(-3)=g(f^{-1}(-3))=g(-4)=3\cdot(-4)-1=-13$ olur.



Örnek 26

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=4x+1$ ve $(gof)(x)=8x-3$ fonksiyonları veriliyor. $g(x)$ fonksiyonunun eşleştirme kuralını bulunuz.



Çözüm

$(gof)(x)=8x-3$

$g(f(x))=8x-3$

$g(\underbrace{4x+1}_{\downarrow})=8x-3$

$a \longrightarrow a=4x+1 \Rightarrow \frac{a-1}{4}=x$

$g(a)=8\cdot\left(\frac{a-1}{4}\right)-3$

$g(a)=2a-5$

$g(x)=2x-5$ olur.



İpucu

Uygun koşullarda tanımlı f, g ve h fonksiyonları için

a) $(f^{-1})^{-1}=f$ olur.

b) $(fof^{-1})=(f^{-1}of)=I$ olur (I: birim fonksiyondur).

c) $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ olur.

ç) $f=g \Rightarrow foh=goh$ veya $hof=hog$ olur.

d) $(fog)oh=fo(goh)$ olur.



Örnek 27

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 6$ olduğuna göre $(gof^{-1})^{-1}(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$(gof^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1}og^{-1}$ olduğundan

$(gof^{-1})^{-1}(2) = \left((f^{-1})^{-1}og^{-1}\right)(2) = \left(fog^{-1}\right)(2) = f(g^{-1}(2))$ olur.

$g^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{2} \Rightarrow g^{-1}(2) = \dfrac{2-6}{2} = -2$ olur. Bulunan bu değer $f(g^{-1}(2))$ ifadesinde yerine yazılırsa

$f(-2) = -2 - 4 = -6$ olur.



Örnek 28

$f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-3}$ olduğuna göre $(\underbrace{fofofo...of}_{21 \text{ tane } f})(5)$ değerini bulunuz.



Çözüm

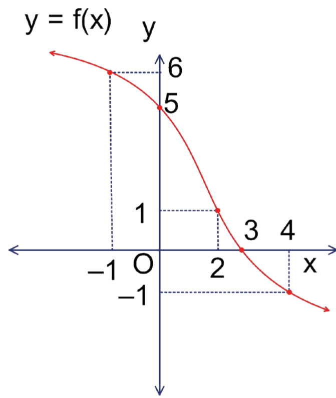
$(fofofo...of) = (fo(fo(fo..(fof)..)))$ tir ancak fonksiyonlarda birleşme özelliği olduğundan hangi sırada işlem yapılırsa yapılsın sonuç değişmeyecektir. $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x-7}{x-3}$ olur.
İstenen fonksiyonda ikinci, dördüncü, altıncı, ..., yirminci f yerine f^{-1} yazılırsa

$(fofofo...of)(x) = (\underbrace{fof^{-1}}_{I}o\underbrace{fof^{-1}}_{I}o...o\underbrace{fof^{-1}}_{I}of)(x) = f(x) = \dfrac{3x-7}{x-3}$ olur.

Bu durumda $f(5) = \dfrac{3 \cdot 5 - 7}{5-3} = \dfrac{8}{2} = 4$ olur.



Örnek 29



Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $f(2) + f^{-1}(-1)$ ifadesinin değerlerini bulunuz.

b) $(fof)(4)$ ifadesinin değerlerini bulunuz.



Çözüm

a) $f(2) = 1$ ve $f(4) = -1$ ise $f^{-1}(-1) = 4$ olur.
Buradan $f(2) + f^{-1}(-1) = 1 + 4 = 5$ olur.

b) $(fof)(4) = f(\underbrace{f(4)}_{-1}) = f(-1) = 6$ olur.



Örnek 30

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(fog)(x) = 4x + 3$ ve $g^{-1}(x) = \frac{2x-7}{2}$ ise $f(8)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$$(fog)(x) = 4x + 3$$
$$(f o \underbrace{g o g^{-1}}_{I})(x) = 4 \cdot g^{-1} + 3$$
$$(f o I)(x) = 4 \cdot \left(\frac{2x-7}{2}\right) + 3$$
$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{2x-7}{2}\right) + 3$$
$$f(x) = 4x - 14 + 3$$
$$f(x) = 4x - 11$$
$$f(8) = 4 \cdot 8 - 11$$
$$f(8) = 21 \text{ olur.}$$



Örnek 31

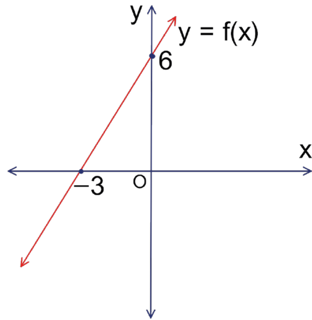
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$ fonksiyonu veriliyor. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



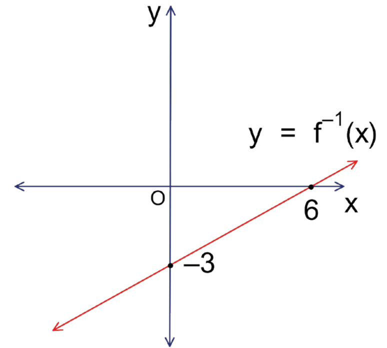
Çözüm

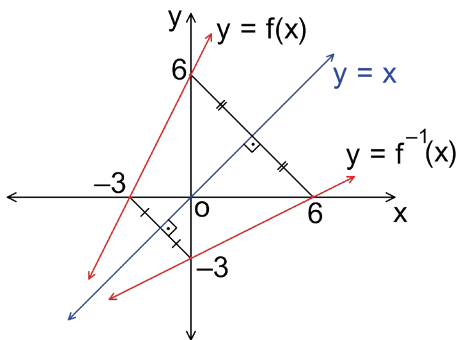
$f(x) = 2x + 6$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{2}$ olur.

$f(x) = 2x + 6$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar
$x = 0$ için $y = 6$,
$y = 0$ için $x = -3$
olur.
Bu noktalardan geçen doğrunun grafiği yandaki gibidir.



$f^{-1}(x) = \frac{x-6}{2}$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar
$x = 0$ için $y = -3$,
$y = 0$ için $x = 6$ olur.
Bu noktalardan geçen doğrunun grafiği yandaki gibidir.

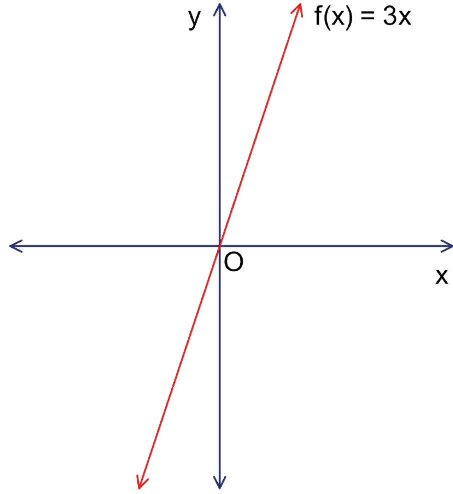




Yandaki şekilde $f(x)$ ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğuna dikkat ediniz.



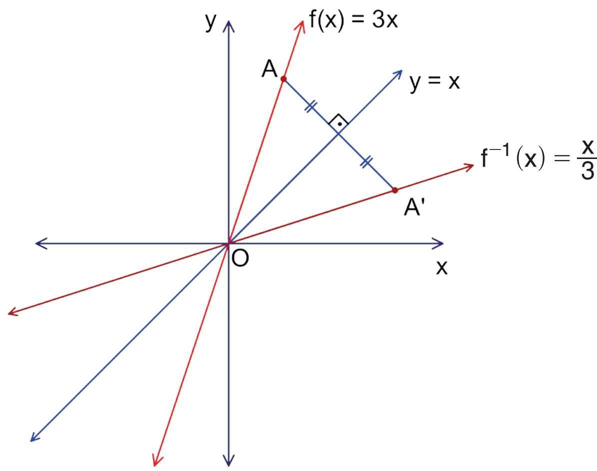
Örnek 32



Yanda grafiği verilen $f(x) = 3x$ fonksiyonunun tersinin grafiğini çiziniz.



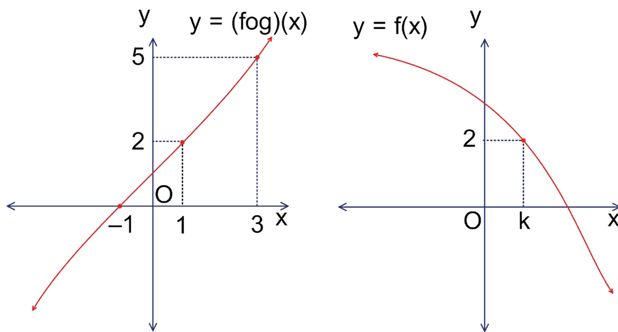
Çözüm



$f(x) = 3x$ fonksiyonunun tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $y = x$ doğrusu çizilip $f(x) = 3x$ in grafiğinde orijin dışındaki herhangi bir A noktası seçilir. Bu noktadan $y = x$ dogrusuna dik olacak şekilde A noktası ile $y = x$ doğrusu arasındaki uzaklığın 2 katı uzunluğunda bir doğru parçası çizilir. Bir ucu A olan bu doğru parçasının diğer ucu A' olmak üzere orijin, $f(x) = 3x$ ve $y = x$ doğrusunun ortak noktası olduğundan başka bir nokta belirlemeye gerek kalmaz. Orijin ve A' noktasından geçen $f(x) = 3x$ fonksiyonunun tersinin grafiği yandaki şekilde çizilebilir.



Örnek 33



Yandaki şekilde fog ve f fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. f bire bir ve örtendir. $g(1) = 3$ olduğuna göre k nin değerini bulunuz.



Çözüm

$(fog)(x)$ grafiğinde $(fog)(1) = 2 \Rightarrow f(g(1)) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = g(1)$ olur. f fonksiyonunun grafiğinde $f^{-1}(2) = k$ olur. Buradan $g(1) = 3$ olduğundan $f^{-1}(2) = g(1) \Rightarrow k = 3$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen fonksiyonların terslerinin fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 7$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-4}{5}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

ç) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^3 + 1$

2. Aşağıda verilen fonksiyonların terslerinin eşleştirme kuralını bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 7$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{5x}{2}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+4}{6}$

ç) $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\},\ f(x) = \dfrac{4x+9}{2x-6}$

3. $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{4\},\ x \cdot f(x) - 2 = 3 \cdot f(x) + 4x$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ i bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 7$ fonksiyonunun tersinin eşleştirme kuralını bulunuz.

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 7$ olmak üzere $f(12) + f^{-1}(29)$ değerini bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{2x-7}{3}$ olmak üzere $f^{-1}(1)$ değerini bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\},\ f(x) = \dfrac{ax+8}{2x+b}$ fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olduğuna göre $a + b$ değerini bulunuz.

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 9$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x - 1$ olmak üzere $(f^{-1}og)(1)$ değerini bulunuz.

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f^{-1}(x) = 3x - 2$ ve $g(x) = 4x + 5$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $(fog^{-1})^{-1}(3)$ değerini bulunuz.

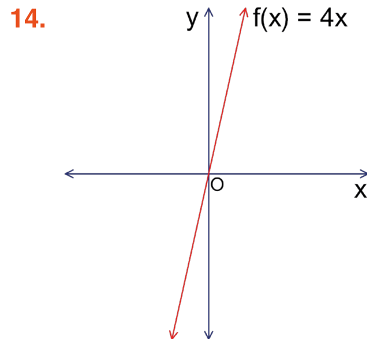
10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(f^{-1}og)(x) = 2x + 7$ ve $g(x) = x + 3$ olduğuna göre $f(5)$ değerini bulunuz.

11. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{5\},\ f\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x+5}{x+1}$ olduğuna göre $f^{-1}(2)$ değerini bulunuz.

12. f ve g tanımlı olduğu aralıklarda bire bir ve örten fonksiyonlardır. $(fog^{-1})(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$ ve $(gof)(x) = \dfrac{x+4}{2x-1}$ olduğuna göre $(fof)(2)$ değerini bulunuz.

13. f ve g fonksiyonları için $g^{-1}(2x+6) = f(5x-2)$ olduğuna göre $(gof)(3)$ değerini bulunuz.

14.



Yukarıda $f(x) = 4x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir.
A kümesine ....kümesi, B kümesine .... kümesi denir.

2. $f : A \rightarrow B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye bu fonksiyonun .... kümesi denir.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen ifadeleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

3.

1. Değer kümesinde eşleşmeyen eleman kalan fonksiyon çeşidi
2. Değer kümesinde eşleşmeyen eleman kalmayan fonksiyon çeşidi
3. Tanım kümesinin her elemanının görüntüsünün aynı olduğu fonksiyon çeşidi
4. Tanım kümesinin her elemanının görüntüsünün kendisine eşit olduğu fonksiyon çeşidi

a) Sabit fonksiyon
b) Birim fonksiyon
c) İçine fonksiyon
ç) Bire bir fonksiyon
d) Örten fonksiyon
e) Doğrusal fonksiyon
f) Tek fonksiyon

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $f = \{(x, 5), (1, 6), (3, 7), (y, 6)\}$ olduğuna göre $x + y$ değerini bulunuz

5. $f : A \rightarrow B$, $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ve $f(x) = 2x + 5$ olduğuna göre f fonksiyonunun görüntü kümesindeki elemanların toplamını bulunuz.

6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 4$ olduğuna göre $f(-2) + f(2)$ değerini bulunuz.

7. $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ olmak üzere $2 \cdot f(x) - x + 4 = x \cdot f(x) - 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(3)$ değerini bulunuz.

8. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu $f(x^3 + 1) = 2x^3 + 7$ biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre $f(5)$ değerini bulunuz.

9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + 2) = f(x) + 3$ olmak üzere $f(7) = -10$ olduğuna göre $f(27)$ değerini bulunuz.

10. $f: A \to B$, $s(A) = 4x - 1$ ve $s(B) = 2x + 7$ ve f bire bir ve içine fonksiyon olduğuna göre x in alacağı değerlerin toplamını bulunuz.

11. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(2x+1) = mx + 4x - n + 5$ ve f fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $m \cdot n$ değerini bulunuz.

12. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x)$ sabit fonksiyon ve $f(1) + f(2) + f(3) = 12$ olduğuna göre $f(7)$ değerini bulunuz.

13. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x)$ doğrusal fonksiyon ve $f(1) = 4$, $f(3) = 12$ olduğuna göre $f(0)$ değerini bulunuz.

14. Tanımlı olduğu aralıklarda f ve g fonksiyonları;
$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, -1)\}$,
$g = \{(2, 4), (3, 3), (4, -4)\}$ biçiminde veriliyor. Buna göre $(2f - 3g)(3)$ değerini bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

15. Aşağıdakilerden hangisi tanımlanan aralıklar için fonksiyon belirtir.

A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

B) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x - 1$

C) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$

D) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

E) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$

16. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(2x + a) = 8 - 5x$ olmak üzere $f(1) = -2$ olduğuna göre $f(5)$ değeri kaçtır?

A) -12 B) -8 C) -2 D) 4 E) 8

17. I. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

II. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x - 3}{4}$

III. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + x$

Yukarıdaki maddelerde verilen fonksiyonların hangisi veya hangileri bire bir ve içine fonksiyondur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

18. Bir otoparkın ücret tarifesi aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Aracın otoparkta kalma süresi t saat, bu süre için ödenecek ücret $f(t)$ Türk lirası olmak üzere

$$f(t)=\begin{cases}2\ , & 0<t<1 \text{ ise}\\ 3\ , & 1\leq t<3 \text{ ise}\\ 5\ , & 3\leq t<6 \text{ ise}\\ 15, & 6\leq t<24 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır.
Bu otoparka sabah 08.00 de gelen 20 araçtan 4 ü saat 08.30 da, 6 sı 10.30 da, kalan 10 araç ise 17.00 de otoparktan ayrıldığına ve otoparka başka araç girmediğine göre otopark işletmesinin bu araçlardan kazandığı toplam para kaç Türk lirasıdır?

A) 144 B) 150 C) 156 D) 161 E) 176

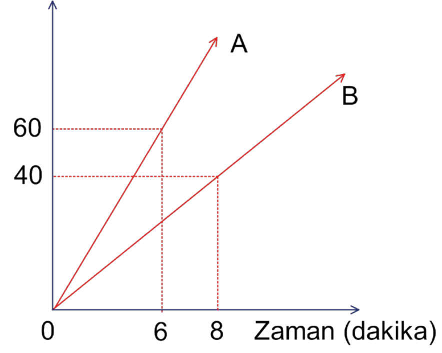
19. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $(f+g)(x)=x-3$ ve $(f-g)(x)=3x+1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(2f+3g)(1)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -8 B) -7 C) -6 D) 6 E) 7

20. $f:[-2,\ 1)\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=2x-3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun görüntü kümesindeki elemanlardan tam sayı olanların toplamı kaçtır?

A) -29 B) -28 C) -27 D) -26 E) -25

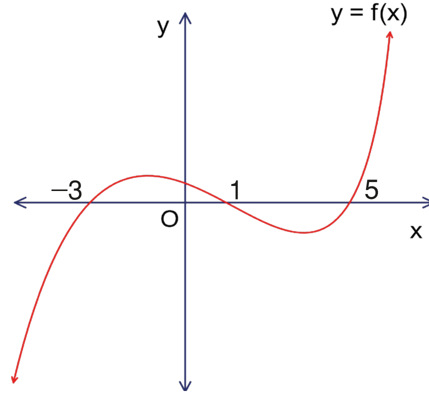
21.



Yukarıdaki grafikte A ve B musluklarından akan su miktarlarının zamana göre değişimi gösterilmiştir. A ve B muslukları 300 litrelik bir depoyu doldurmak için deponun üstüne yerleştirilmiştir. İki musluk boş depoyu doldurmak için aynı anda açılırsa depo kaç dakikada dolar?

A) 15 B) 20 C) 24 D) 30 E) 40

22.



Yukarıdaki grafikte $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)=0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-3,\ 5]$ B) $[-2,\ 2]$ C) $\{-3,\ 1,\ 5\}$ D) $\{-2,\ 0,\ 2\}$ E) $\{-2,\ 2\}$

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıda numaralarla verilen fonksiyonlar ile harflerle verilen bu fonksiyonların terslerini eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

1.

1. $f(x) = x+5$
2. $f(x) = x-5$
3. $f(x) = 5x$
4. $f(x) = \frac{x}{5}$

a) $f^{-1}(x) = x+5$

b) $f^{-1}(x) = x-5$

c) $f^{-1}(x) = -x+5$

ç) $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

d) $f^{-1}(x) = -5x$

e) $f^{-1}(x) = 5x$

f) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{5}$

1.	2.	3.	4.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevaplarını bulunuz.

2. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu $f(3x-2) = 6x+7$ olduğuna göre $f^{-1}(-5)$ değerini bulunuz.

3. $f : \mathbb{R}-\{-3\} \to \mathbb{R}-\{4\}$ olmak üzere $x = \dfrac{3f(x)-2}{4-f(x)}$ ifadesi veriliyor. Buna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

4. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları $f(x) = |x-2|$ ve $g(x) = 2x-3$ biçiminde tanımlanıyor.
Buna göre $(gof)(x) = 7$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamını bulunuz.

5. f fonksiyonu, tanım kümesindeki her gerçek sayı için $f(x) - 2 \cdot f(x+2) = 3$ eşitliğini sağlıyor. $f(1) = -1$ olduğuna göre $f(5)$ değerini bulunuz.

6. $f : (-\infty, -3] \to [2, \infty)$ bir fonksiyon ve $f(x) = x^2+6x+11$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

7. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu, $f(x^3-7) = 2x-1$ biçiminde tanımlanmıştır. $f^{-1}(7) = k$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

8 - 10. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Uğurlu Sayılar 0yunu

Bu oyun 3 kişi ile oynanır. İlk olarak herkes kendi uğurlu sayılarıyla yapacağı işlemleri belirler ve bir diğerine söylemez. Birinci kişinin herhangi bir uğurlu sayı belirlemesi ile oyun başlar. Birinci kişi belirlediği uğurlu sayıyı belirlediği işlemlere tabi tutarak çıkan sonucu ikinci kişiye söyler bu sayı ikinci kişinin uğurlu sayısı olur. İkinci kişi de bu uğurlu sayıyı belirlediği işlemlere tabi tutarak çıkan sonucu üçüncü kişiye söyler bu sayı üçüncü kişinin uğurlu sayısı olur. Üçüncü kişi de bu uğurlu sayısını belirlediği işlemlere tabi tutarak çıkan sonucu birinci kişiye söyler bu sayı birinci kişinin yeni uğurlu sayısı olur ve bu işlemler tekrar eder.

- Bu oyun tüm oyuncuların beşer uğurlu sayısı olduğunda son bulur.
- Oyun sonunda uğurlu sayılarının toplamının mutlak değeri en küçük olan kişi oyunu kazanır.
- Eğer eşitlik durumu varsa uğurlu sayılarının toplamı büyük olan kişi birinci olur.
- Eğer iki durumda da birinci belirlenemezse oyun tekrarlanır.

Hakan, Esra ve oğulları Kaan'ın beraber oynadığı uğurlu sayılar oyunu ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Oyun Hakan ile başlayıp Kaan'ın beşinci uğurlu sayısının oluşmasıyla son bulmuştur.
- Oyun boyunca Hakan, uğurlu sayılarını -2 ile çarpmıştır. Esra, uğurlu sayılarını 2 ile çarpıp 5 ile toplamıştır. Kaan ise uğurlu sayılarını 1 ile çarpmıştır.
- Hakan'ın ilk uğurlu sayısı 5 tir.

8. Hakan'ın herhangi bir uğurlu sayısı x olmak üzere bir sonraki uğurlu sayısını veren x e bağlı fonksiyonu yazınız.

9. Bu oyunu kimin kazandığını bulunuz.

10. Kaan'ın uğurlu sayılarından rastgele biri seçildiğinde seçilen sayının aynı zamanda Hakan'ın da uğurlu sayısı olması olasılığını bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

11. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(x)=2x-1$ biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre

I. f bire bir fonksiyondur.
II. (fof) örten fonksiyondur.
III. f fonksiyonunun tersi tanımlıdır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

12. f ve g tanımlı oldukları aralıklarda bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere $f(x)=3x+8$ ve $g(x)=x-7$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $(fog)^{-1}(-3)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{-11}{3}$ B) $\frac{-8}{3}$ C) -2 D) $\frac{10}{3}$ E) 5

13. f bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere $f(x)=\frac{2mx+5}{4x+m-3}$ fonksiyonu için $(fof)(x)=x$ olduğuna göre m değeri kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 5

14. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=2x+1$ ve $(fog)(x)=4x-3$ fonksiyonları tanımlanıyor. $g(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x-2$ B) $3x-1$ C) $2x-3$ D) $x-2$ E) $2x+2$

15. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+7$ olmak üzere $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f(x)-7}{2}$ B) $\frac{3f(x)+7}{2}$ C) $\frac{f(x)-21}{4}$ D) $\frac{f(x)+7}{f(x)}$ E) $\frac{f(x)+7}{4}$

16. $f=\{(-2,1),(-1,0),(1,2),(3,4)\}$ ve $g=\{(0,5),(1,3),(3,2)\}$

veriliyor. Buna göre $(f+g)(1)+(g-f)(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

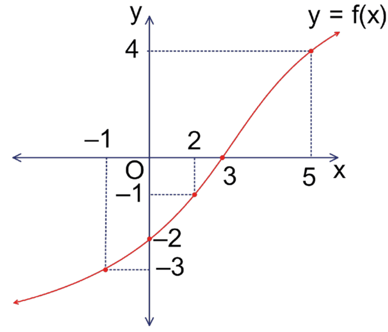
17. f, g ve h gerçek sayılarda tanımlı bire bir ve örten fonksiyonlar ve

$f^{-1}(3x-2)=g(x+4)=h\left(\frac{x-1}{2}\right)$ olmak

üzere $(fog)(5)+(g^{-1}oh)(0)$ değeri kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

18.



Yukarıdaki şekilde verilen $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre $\frac{f(2)+f^{-1}(-3)}{f^{-1}(-2)+(fof)(2)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

19. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu,

$f(x)=\frac{x+1}{a}$ biçiminde tanımlanmıştır

$(a\neq 0)$ $(fof)(x)=\frac{x+4}{9}$ olduğuna göre a nın değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 10

20. f fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}2x+5, & x>2 \text{ ise}\\ 3x+4, & x\leq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır.
$f(k)=7$ olduğuna göre k değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

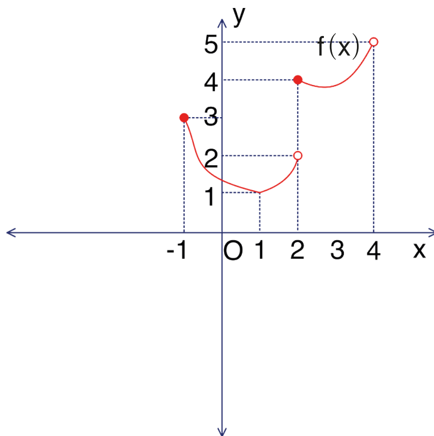
A) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

1. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarından f sabit fonksiyon, g birim fonksiyondur.
$f(x)+2\cdot g(x)=4x-ax+3$ olduğuna göre $f(5)+g(5)$ değerini bulunuz.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)$ doğrusal fonksiyondur.
$f(x-1)+f(x+1)=6x-4$ olduğuna göre $f(3)$ değerini bulunuz.

3. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $(2f-g)(x)=4x+4$, $(f+3g)(x)=9x-5$ olduğuna göre $f(3)+2\cdot g(2)$ değerini bulunuz.

4.



Yukarıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerinin kesişimindeki tam sayıların toplamını bulunuz.

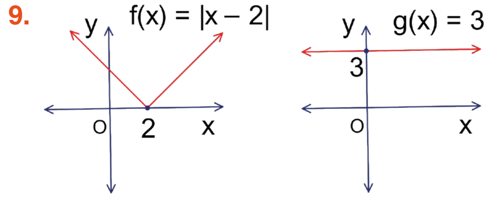
5. Gerçek sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu,
f : "Her bir gerçek sayıyı kendisinden büyük veya eşit en küçük tam sayıya götürüyor." biçiminde tanımlanıyor. Buna göre
$f(\sqrt{7})\cdot f(\frac{11}{4})-f(-\frac{3}{2})$ değerini bulunuz.

6. $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ olmak üzere $f:A\to A$ fonksiyonu bire birdir.
Buna göre $[f(-2)]^2+f(1)+f(0)$ toplamının alabileceği **en büyük** değerini bulunuz.

7. Gerçek sayılar kümesi üzerinde f ve g fonksiyonları $f(x)=2x+3$ ve $g(x)=\frac{x+1}{2}$ biçiminde tanımlanıyor.
$f(x-1)=g(3x)$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

8. f fonksiyonu tanımlı olduğu kümede bire bir ve örten bir fonksiyondur.
$f(x)=\frac{mx+3}{7x-5}$ olmak üzere f nin tersi kendisine eşit olduğuna göre m değerini bulunuz.

9.



Yukarıda grafiği verilen f ve g fonksiyonları için $f(x) - 2 \cdot g(x) = 0$ denklemini sağlayan x gerçek sayılarının toplamını bulunuz.

10 - 13. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Bilgi: Su içerisindeki bir cismin, su yüzeyine olan uzaklığının su yüzeyinden bakıldığında cismin görünen uzaklığına oranı $\frac{4}{3}$ tür. Su içerisinden bakıldığında ise durum tam tersidir. Örneğin 4 metre derinlikteki bir cisme su yüzeyinden bakıldığında cisim 3 metre derinlikte görülür. 3 metre derinlikten su yüzeyindeki bir cisme bakıldığında ise cisim 4 metre uzaklıkta görülür.

10. x metre derinlikte bulunan bir cismin su yüzeyinden bakıldığında derinliğini veren x e bağlı eşleştirme kuralını yazınız.

11. 8 metre derinlikte bulunan bir cismin su yüzeyinden bakıldığında kaç metre derinlikte görüleceğini bulunuz.

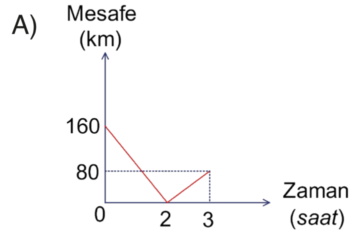
12. x metre derinlikte bulunan biri su yüzeyindeki birinin cisme baktığında cismi gördüğü uzaklığı veren x e bağlı eşleştirme kuralını yazınız.

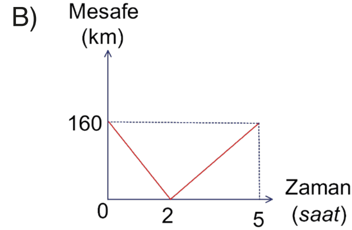
13. 12 metre derinlikteki bir dalgıcın su yüzeyinde yüzen arkadaşını kaç metre uzaklıkta göreceğini bulunuz.

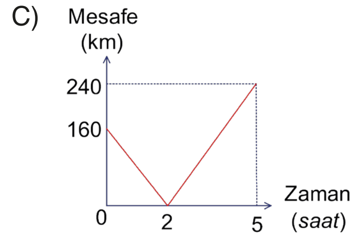
B) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

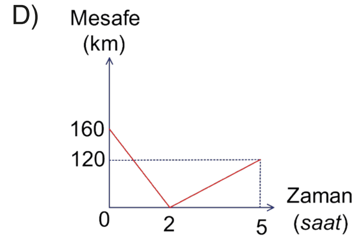
14. Sabit hızlarla hareket eden iki otomobilin hızları toplamı saatte 80 km dir. Aralarında 160 km mesafe bulunan bu otomobiller birbirine doğru doğrusal bir yol boyunca aynı anda harekete başlıyor. Bu otomobiller karşılaştıktan sonra doğrultularını değiştirmeden hızlarını yarıya düşürerek 3 saat daha yol alıyor.

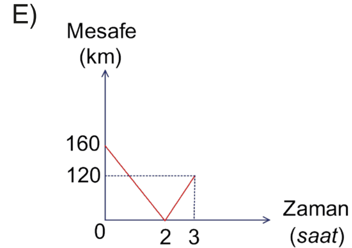
Buna göre bu otomobillerin arasındaki mesafeyi, geçen zamana bağlı olarak gösteren grafik aşağıdakilerden hangisidir?

A)


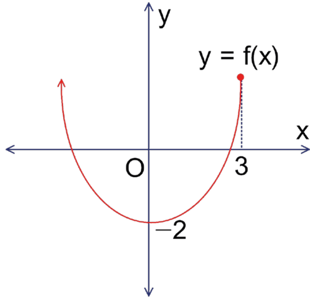
B)


C)


D)


E)


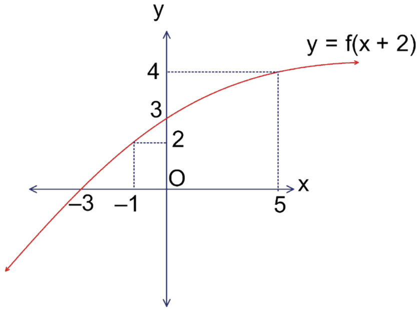
15.



Yukarıdaki grafikte verilen $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi A, görüntü kümesi B olmak üzere bu kümeler aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

	A	B
A)	$(-2, 3)$	$(-\infty, \infty)$
B)	$(-\infty, 3)$	$(0, \infty)$
C)	$(-2, 3]$	$(-\infty, \infty)$
D)	$(-2, 3]$	$[-2, \infty)$
E)	$(-\infty, 3]$	$[-2, \infty)$

16.



Yukarıda $y = f(x+2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f bire bir örten fonksiyon olduğuna göre $f(7) + f^{-1}(3) + f(1)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -3 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

17. f gerçek sayılarda tanımlı bir doğrusal fonksiyondur. $f(2) = 7$ ve $f^{-1}(5) = 1$ olduğuna göre $(fof)(0)$ değeri kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 9 D) 16 E) 24

18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^{x+3}$ olmak üzere $f^{-1}(81)$ değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19. f ve g bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere aşağıdaki tabloda x değerleri için f, g ve fog^{-1} fonksiyonları altındaki görüntülerden bazıları verilmiştir.

x	−1	1	3	4
f(x)	5	3	2	−1
g(x)	1			3
$(fog^{-1})(x)$		a	b	

Yukarıda verilenlere göre $a + b$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20.

	Taksimetre Açılış Ücreti	Kilometre Başına Ücret
Antalya	₺ 4,00	₺ 3,00
İstanbul	₺ 3,50	₺ 2,00

Yukarıdaki tabloda Antalya ve İstanbul'daki taksimetre tarifeleri verilmiştir. Antalya'da çalışan Polen Hanım bir toplantı için İstanbul'a hava yolu ile gitmiştir. Antalya'daki iş yerinden taksiye binen Polen Hanım Antalya havaalanına gelmiş ve uçağa binip İstanbul'a ulaştıktan sonra da taksi ile toplantı salonuna varmıştır. Dönüşte de aynı yöntemi kullanan Polen Hanım taksi ile toplam 40 km yol gitmiş ve ₺ 101 taksi ücreti ödemiştir.
Buna göre Polen Hanım'ın Antalya'daki iş yeri ile Antalya havaalanı arasında taksi ile gittiği uzaklık kaç kilometredir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

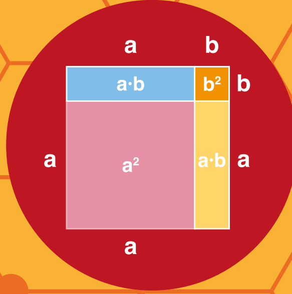
DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



SAYILAR VE CEBİR

3

$P(x)$



$x^2 - y^2$

POLİNOMLAR

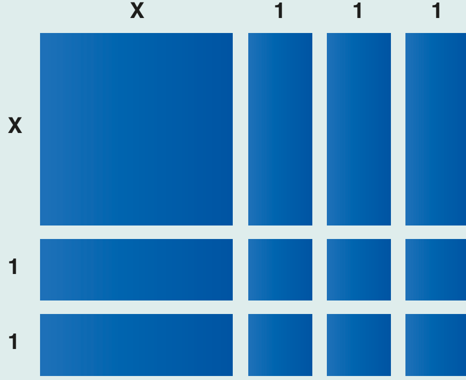
10.3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler
10.3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması

10.3. POLİNOMLAR



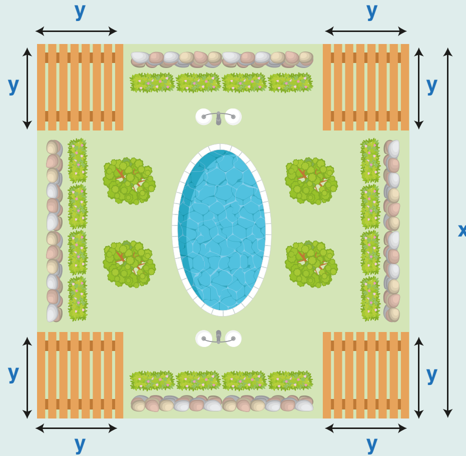
Hazırlık Çalışması

1.



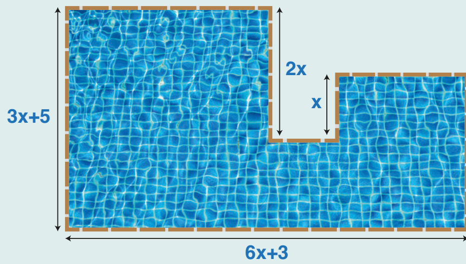
Dikdörtgen ve karelerden oluşan yandaki şekil üzerinde dikdörtgen ve karelerin kenar uzunlukları verilmiştir. Bu parçaların birleşmesiyle oluşacak dikdörtgenin alanını cebirsel olarak ifade ediniz.

2.



Emekliler için belediye tarafından bir kenar uzunluğu x metre olan kare şeklindeki bir parkın dört köşesine bir kenarı y metre olan kare şeklinde dinlenme ve sohbet alanları yapılmıştır. Parkın bu alanlar dışında kalan kısmının alanını veren ifadeyi cebirsel olarak yazınız.

3.



Müteahhit, tatil sitesine köşeleri dik kesişen yandaki şekildeki gibi bir havuz yaptırmak istiyor. Bu havuzun çevresine taşan suların yeşil alanların sulanmasında değerlendirilmesi amacıyla havuzun çevresi boyunca ızgara yerleştirmek istiyor. Bunun için gerekli olan ızgaranın uzunluğunu veren cebirsel ifadeyi yazınız (Izgaranın genişliği önemsenmeyecektir.).



Arif Mamış Tekstil Firmasının üretim bölümünde A, B, C, D, E şeklinde farklı tekstil modeli üretimi yapan 5 tip makine vardır. Firmanın üretim bölümünde A makinesinden 3, B makinesinden 4, C makinesinden 5, D makinesinden 2 ve E makinesinden 6 adet vardır. x saat olmak üzere A makinesi x saatte x^4 adet, B makinesi x saatte x^3 adet, C makinesi x saatte x^2 adet, D makinesi x saatte x adet ve E makinesi x saatte 5 adet ürün üretmektedir.



Bu fabrikanın x saatteki toplam üretim miktarını veren ifade, $3x^4+4x^3+5x^2+2x+30$ şeklinde bir çoklu terimdir. Bu çoklu terime P(x) denilirse $P(x)=3x^4+4x^3+5x^2+2x+30$ olur. Bu ifadeye matematiksel olarak **polinom** denir. Polinom, Türk Dil Kurumunun Türkçe Sözlük'ünde "çok terimli" olarak tanımlanmaktadır.

Niğde Valiliği bu firmayı arayarak 15 Temmuz'u Anma kapsamında şehirdeki etkinliklerde kullanılmak üzere toplam 34 550 adet Türk Bayrağı ve Ömer Hâlisdemir desenli bayrak siparişi veriyor. Pazarlama bölümüne gelen sipariş adedi, üretim bölümüne iletildiğinde bu ihtiyacın tüm makinelerin onar saatlik toplam üretim miktarına karşılık geldiği hesaplanıyor. Makinelerin üretim yapmasını sağlayan sisteme 10 sayısı girildiğinde $P(10)=3\cdot10^4+4\cdot10^3+5\cdot10^2+2\cdot10+30=34\ 550$ adet bayrak üretilmesi sağlanıyor.

10.3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler

Terimler ve Kavramlar

- Polinom, Polinomun Derecesi
- Polinomun Katsayıları
- Polinomun Baş Katsayısı
- Polinomun Sabit Terimi
- Sabit Polinom, Sıfır Polinomu
- Polinomun Sıfırları

Sembol ve Gösterimler

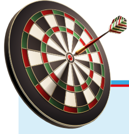
P(x)



Neler Öğreneceksiniz?

- Bir değişkenli polinom kavramını,
- Polinomlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini kavramayı öğreneceksiniz.

10.3.1.1. Bir Değişkenli Polinom Kavramı



Bilgi

x bir değişken, $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ birer gerçek sayı olmak üzere

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

biçimindeki ifadeye **gerçek katsayılı** ve **bir değişkenli polinom (çok terimli)** adı verilir. x değişkenine bağlı polinomlar $P(x), Q(x), R(x), ...$ gibi ifadelerle gösterilir.



Örnek 1

Aşağıda verilen ifadelerin polinom olup olmadıklarını bulunuz.

a) $P(x) = -7x^4 + 3x^2 - 8x + 4$

b) $Q(x) = -11x^6 + \frac{1}{x^5} - x^2 + 3$

c) $R(x) = \sqrt{7}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + 5$



Çözüm

a) P(x) in her x değişkeninin üssü birer doğal sayıdır. Dolayısıyla P(x) bir polinomdur.

b) Q(x) in $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$ ve $-5 \notin \mathbb{N}$ olduğundan Q(x) bir polinom değildir.

c) R(x) in her x değişkeninin üssü birer doğal sayıdır. Dolayısıyla R(x) bir polinomdur.

Polinomun Derecesi, Katsayıları ve Sabit Terimi



Bilgi

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$ polinomunda,

- $a_n \cdot x^n$, $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, $a_2 \cdot x^2$, $a_1 \cdot x^1$, a_0 ifadelerine polinomun **terimleri** denir.
- a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 gerçek sayılarına polinomun **katsayıları** denir.
- x değişkeninin aldığı en büyük üsse polinomun **derecesi** denir ve der[P(x)] ile gösterilir.
- Bir polinomun en büyük dereceli teriminin katsayısına polinomun **baş katsayısı** denir.
- a_0 ifadesine polinomun **sabit terimi** denir.



Örnek 2

$P(x) = -7x^6 + 4x^5 + 8x^3 - 7x + 15$ polinomu veriliyor. Buna göre

a) P(x) polinomunun derecesini bulunuz.

b) P(x) polinomunun katsayılarını bulunuz.

c) P(x) polinomunun baş katsayısını bulunuz.

d) P(x) polinomunun sabit terimini bulunuz.



Çözüm

a) $P(x)$ polinomunun derecesi 6 dır ve $der[P(x)] = 6$ olarak ifade edilir.

b) $P(x)$ polinomunun katsayıları $-7,\ 4,\ 0,\ 8,\ 0,\ -7,\ 15$ tir (x^4lü ve x^2li terimlerinin katsayısı 0 dır.).

c) $P(x)$ polinomunun baş katsayısı $-7x^6$ teriminin katsayısı olan -7 dir.

d) $P(x)$ polinomunun sabit terimi 15 tir (üssü 0 olan terimin katsayısı).



Örnek 3

$P(x) = -3x^{\frac{12}{n}} - 6x^{n-3} + x^2 - 5$ ifadesinin bir polinom belirtmesi için n nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.



Çözüm

P(x) ifadesinin bir polinom belirtmesi için $\frac{12}{n} \in \mathbb{N}$ ve $n - 3 \in \mathbb{N}$ olmalıdır.

$n - 3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3$ olur. Buradan $n \in \{3, 4, 5, ...\}$ olur.

$\frac{12}{n} \in \mathbb{N}$ şartını sağlayan doğal sayılar $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ olur.

Her iki koşulu da sağlayan n değerleri 3, 4, 6 ve 12 dir. Toplamları ise $3 + 4 + 6 + 12 = 25$ olur.



Örnek 4

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ olduğuna göre $P(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

P(x) polinomunda x yerine 2 yazılarak P(2) değeri hesaplanır. Buradan
$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 16 - 20 + 4 - 8 = -8$ olur.



Örnek 5

$P(2x-3) = 4x^2 - 10x + 5$ olduğuna göre $P(-7)$ değerini bulunuz.



Çözüm

Verilen polinomda $2x - 3$ ifadesi -7 ye eşitlenirse $2x - 3 = -7 \Rightarrow x = -2$ olur. Bu değer,
$P(2x-3) = 4x^2 - 10x + 5$ polinomunda x yerine yazılırsa

$P(2 \cdot (-2) - 3) = 4 \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) + 5$

$P(-7) = 16 + 20 + 5$

$P(-7) = 41$ olur.



Örnek 6

$Q(x) = -8x + 11$ olduğuna göre $Q(3x+1)$ polinomunu bulunuz.



Çözüm

$Q(x) = -8x + 11$ polinomunda x yerine $3x + 1$ yazılırsa

$Q(3x+1) = -8 \cdot (3x+1) + 11 = -24x + 3$ olur.



Örnek 7

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere
$-2 \cdot P(x+2) + x \cdot Q(x-1) = x^2 + 3x + 6$ ve $P(5) = -6$ olduğuna göre $Q(2)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$Q(x-1) = Q(2) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$ değeri $-2 \cdot P(x+2) + x \cdot Q(x-1) = x^2 + 3x + 6$ ifadesinde x yerine yazılırsa

$-2 \cdot P(3+2) + 3 \cdot Q(3-1) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 6$

$-2 \cdot P(5) + 3 \cdot Q(2) = 24$ olur.

Elde edilen eşitlikte P(5) yerine -6 yazılırsa

$-2 \cdot (-6) + 3 \cdot Q(2) = 24$

$12 + 3 \cdot Q(2) = 24$

$3 \cdot Q(2) = 12$

$Q(2) = 4$ olur.



Örnek 8

$P(2x-4) = -10x+7$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.



Çözüm

$2x-4$ ifadesine f(x) denilirse $f(x) = 2x-4$ ve $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$ olur.

$(fof^{-1})(x) = x$ olduğundan $P(2x-4) = -10x+7$ polinomunda x yerine $\frac{x+4}{2}$ yazılırsa

$$P\left(2\cdot\left(\frac{x+4}{2}\right)-4\right) = -10\cdot\left(\frac{x+4}{2}\right)+7$$

$$P(x) = -5x-20+7$$

$$= -5x-13 \text{ olur.}$$



İpucu

Bir polinomun katsayıları toplamı, polinomun değişkeninin yerine 1 yazılarak bulunur.

- $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1)$ dir.
- $P(x+3)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1+3) = P(4)$ olur.
- $Q(x^2+5x-1)$ polinomunun katsayıları toplamı $Q(1^2+5\cdot 1-1) = Q(5)$ olur.
- $(x^2+3)\cdot R(x-1)$ polinomunun katsayıları toplamı
  $(1^2+3)\cdot R(1-1) = 4\cdot R(0)$ olur.



Örnek 9

$P(x) = (x^2-2)^8\cdot(3x-2)^{11}$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.



Çözüm

P(x) polinomunun katsayıları toplamı $P(1)$ olduğundan x yerine 1 yazılırsa

$$P(x) = (x^2-2)^8\cdot(3x-2)^{11}$$

$$P(1) = (1^2-2)^8\cdot(3\cdot 1-2)^{11}$$

$$P(1) = (-1)^8\cdot(1)^{11} = 1 \text{ olur.}$$



Örnek 10

$P(x) = -2\cdot ax^3+4\cdot x^2+ax+3a+2$ polinomunun katsayıları toplamı $4a+10$ olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

P(x) polinomunun katsayıları toplamı P(1) dir.

$$P(1) = -2a\cdot 1^3+4\cdot 1^2+a\cdot 1+3a+2 = 4a+10$$

$$-2a+4+a+3a+2 = 4a+10$$

$$2a+6 = 4a+10$$

$$a = -2 \text{ olur.}$$



Örnek 11

$P(x-1) = -8 \cdot x^2 + 4x - 3$ olduğuna göre $P(2x-6)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.



Çözüm

$P(2x-6)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(2 \cdot 1 - 6) = P(-4)$ olur. Buradan $P(x-1)$ polinomunda $P(-4)$ değerini bulmak için $x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3$ değeri $P(x-1) = -8 \cdot x^2 + 4x - 3$ polinomunda x yerine yazılırsa $P(-3-1) = -8 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 3 \Rightarrow P(-4) = -72 - 12 - 3 = -87$ olur.



Örnek 12

$P\left(\frac{x+1}{2}\right) = -10x + 26$ olduğuna göre $(2x^2 - 4) \cdot P^2(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.



Çözüm

$(2x^2 - 4) \cdot P^2(x+1)$ ifadesinde x yerine 1 yazılırsa $(2 \cdot (1)^2 - 4) \cdot P^2(1+1) = -2 \cdot P^2(2)$ olur. Buradan

$P\left(\frac{x+1}{2}\right)$ polinomunda $P(2)$ değerini bulmak için $\frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$ olur. Bu değer,

$P\left(\frac{x+1}{2}\right) = -10x + 26$ polinomunda x yerine yazılırsa $P\left(\frac{3+1}{2}\right) = -10 \cdot 3 + 26 \Rightarrow P(2) = -4$ olur.

Buradan $-2 \cdot P^2(2) = -2 \cdot (-4)^2 = -32$ olur.



Örnek 13

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamının $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$ ve tek dereceli terimlerin katsayıları toplamının $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm

P(x) polinomundaki çift dereceli terimler ax^4, cx^2 ve e dir. Buradan çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı $a + c + e$ olur. Tek dereceli terimler ise bx^3 ve dx tir. Buradan tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı $b + d$ olur.

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= a + b + c + d + e \\ + \quad P(-1) &= a - b + c - d + e \end{aligned}\right\}$$ ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$P(1) + P(-1) = 2a + 2c + 2e$$
$$P(1) + P(-1) = 2 \cdot (a + c + e)$$
$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = a + c + e \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= a + b + c + d + e \\ - \quad P(-1) &= a - b + c - d + e \end{aligned}\right\}$$ ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$P(1) - P(-1) = 2b + 2d$$
$$P(1) - P(-1) = 2 \cdot (b + d)$$
$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = b + d \text{ olur.}$$



İpucu

Bir P(x) polinomunda;

Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$,

Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$ olur.



Örnek 14

$P(x)=(2x^3-3)^2\cdot(x^2+1)^4$ polinomu veriliyor. Buna göre

a) $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

b) $P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.



Çözüm

$P(x)=(2x^3-3)^2\cdot(x^2+1)^4$ ise $P(1)=(2\cdot(1)^3-3)^2\cdot((1)^2+1)^4=(-1)^2\cdot 2^4=16$

$P(-1)=(2\cdot(-1)^3-3)^2\cdot((-1)^2+1)^4=(-5)^2\cdot 2^4=400$ olur. Buradan

a) P(x) polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı,

$\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{16+400}{2}=208$ olur.

b) P(x) polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı,

$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=\frac{16-400}{2}=-192$ olur.



İpucu

Bir polinomun sabit terimi, polinomun değişkeninin yerine 0 yazılarak bulunur.

- P(x) polinomunun sabit terimi P(0) dır.
- $P(x+3)$ polinomunun sabit terimi $P(0+3)=P(3)$ olur.
- $Q(2x^3+5x-1)$ polinomunun sabit terimi $Q(2\cdot(0)^3+5\cdot(0)-1)=Q(-1)$ olur.
- $(3x-6)\cdot R(x+7)$ polinomunun sabit terimi $(3\cdot(0)-6)\cdot R(0+7)=(-6)\cdot R(7)$ olur.



Örnek 15

$P(x)=(x+1)^5-2\cdot(3x-1)^4$ polinomunun sabit terimini bulunuz.



Çözüm

P(x) polinomunun sabit terimi P(0) olduğundan x yerine 0 yazılırsa

$P(x)=(x+1)^5-2\cdot(3x-1)^4$

$P(0)=(0+1)^5-2\cdot(3\cdot 0-1)^4$

$P(0)=1-2\cdot 1=-1$ olur.



Örnek 16

$P(2x-2) = -8x^2 + 6x - 4$ olduğuna göre $(x^2+4) \cdot P(x+4)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.



Çözüm

$(x^2+4) \cdot P(x+4)$ polinomunda x yerine 0 yazılırsa $((0)^2+4) \cdot P(0+4) = 4 \cdot P(4)$ olur. $P(2x-2)$ polinomunda $P(4)$ü bulmak için $2x-2=4 \Rightarrow x=3$ değeri $P(2x-2) = -8x^2+6x-4$ polinomunda yerine yazılırsa $P(2 \cdot 3 - 2) = -8 \cdot (3)^2 + 6 \cdot (3) - 4 \Rightarrow P(4) = -72 + 18 - 4 \Rightarrow P(4) = -58$ olur. Dolayısıyla $4 \cdot P(4) = 4 \cdot (-58) = -232$ bulunur.

Sabit Polinom



Bilgi

a_0 sıfırdan farklı gerçek sayı olmak üzere $P(x) = a_0$ ise P(x) polinomuna **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

$P(x) = -7$, $Q(x) = -\sqrt{3}$, $R(x) = 2a^2 + a$ ve $T(x) = y^2 - 3y$ polinomları birer sabit polinomdur.



Örnek 17

P(x) sabit bir polinomdur. $P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 3^{15}$ olduğuna göre $P(x-3)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$a_0 \neq 0$ olmak üzere $P(x) = a_0$ denilirse $P(1) = P(2) = P(3) = a_0$ olur. Buradan

$a_0 \cdot a_0 \cdot a_0 = 3^{15} \Rightarrow (a_0)^3 = 3^{15} \Rightarrow (a_0)^3 = (3^5)^3 \Rightarrow a_0 = 3^5$ bulunur.

Buradan $P(x) = 3^5$ ve $P(x-3) = 3^5$ olur.



Örnek 18

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Q(x) = (-2a+6) \cdot x^2 + (b-5) \cdot x + a \cdot b + 6$ polinomu bir sabit polinom olduğuna göre $Q(2018)$ değerini bulunuz.



Çözüm

$Q(x)$ bir sabit polinom olduğundan x^2 ve x li terimlerin katsayıları 0 olmalıdır.

$-2a+6=0 \Rightarrow a=3$ ve $b-5=0 \Rightarrow b=5$ olur.

Bulunan a ve b değerleri $Q(x) = (-2a+6) \cdot x^2 + (b-5) \cdot x + a \cdot b + 6$ polinomunda yerine yazılırsa

$Q(x) = (-2 \cdot (3) + 6) \cdot x^2 + (5-5) \cdot x + (3) \cdot (5) + 6 = 21$ bulunur. Buradan $Q(2018) = 21$ olur.

Sıfır Polinomu



Bilgi

$P(x) = 0$ polinomuna **sıfır polinomu** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.



Örnek 19

m, n, k, t gerçek sayılar olmak üzere $Q(x) = (2m-8)x^3 + (n+6)x^2 + kx + m + t - 10$ polinomu sıfır polinomu olduğuna göre $m \cdot n - k + t$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$Q(x)$ bir sıfır polinomu olduğundan x^3, x^2, x in katsayılarının ve sabit terimin 0 olması gerekir.

$2m - 8 = 0 \Rightarrow m = 4$ ve $n + 6 = 0 \Rightarrow n = -6$,

$k = 0$ ve $\underbrace{m}_{4} + t - 10 = 0 \Rightarrow 4 + t - 10 = 0 \Rightarrow t = 6$ olur.

Buradan $m \cdot n - k + t = 4 \cdot (-6) - 0 + 6 = -24 + 6 = -18$ bulunur.



Bilgi

Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit olan polinomlara **eşit polinomlar** denir.

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$,

$Q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x^1 + b_0$ polinomları birbirine eşit ise

$a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$ olmalıdır.



Örnek 20

$P(x) = (a+3)x^3 + (b-4)x^2 + 6x - c$ ve $Q(x) = 2ax^3 + (d+10)x + a - 6$ polinomları için $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b + c + d$ değerini bulunuz.



Çözüm

$P(x) = Q(x)$ ise bu iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları da aynı olmalıdır.

$(a+3)x^3 + (b-4)x^2 + 6x - c = 2ax^3 + 0x^2 + (d+10)x + a - 6$ eşitliğinden

$a + 3 = 2a \Rightarrow a = 3$,

$b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$,

$6 = d + 10 \Rightarrow d = -4$,

$-c = \underbrace{a}_{3} - 6 \Rightarrow c = 3$ olur.

Buradan $a + b + c + d = 3 + 4 + 3 - 4 = 6$ bulunur.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadelerin bir polinom olup olmadığını bulunuz.

a) $P(x) = -8x^5 + \sqrt[3]{7}x^2 - 8x$

b) $T(x) = -17$

c) $R(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{x^2}{\sqrt{2}} - 9x$

ç) $M(x) = -7x^3 - 8\sqrt[5]{x} - 16$

2. $P(x) = -3x^{\frac{n+30}{n}} + 5x^4 - 7x^{n-4}$ ifadesi bir polinom belirttiğine göre $P(x)$ polinomunun derecesinin alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamını bulunuz.

3. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Q(x) = (-a+6)x^4 + (a-b+4)x^2 + a^2 - b^2$ polinomu sabit polinomdur. Buna göre $Q(x-4)$ polinomunu bulunuz.

4. $m, n, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(x) = (8-m)x^2 + (n+2)x - 10 + t$ polinomu sıfır polinomudur. Buna göre $m \cdot n - t$ değerini hesaplayınız.

5. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(x+1) = -2ax^3 + 6x^2 + ax - 8$ polinomunun katsayıları toplamı -5 tir. Buna göre $P(3)$ değerini bulunuz.

6. $P(x) = -2x^3 + 5x - 6$ ve $Q(x) = 3x^4 - 6x + 7$ polinomları veriliyor. Buna göre $(x+2) \cdot P^2(x) \cdot Q(x-1)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

7. $P(x) = (x-3)^4 \cdot (x^2+1)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı $-15 \cdot 2^{m-4}$ olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.

8. $P(x) = (-a+4)x^3 - (b+3)x^2 - c \cdot x + 10$ ve $Q(x) = (c+3)x^3 + (b-5)x + a + d$ polinomları veriliyor. $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a \cdot b - c \cdot d$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. $P(x)$ bir polinomdur. $P(x-4) + P(x+4) = -8x + 10$ veriliyor. Buna göre $P(x+5)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

10.3.1.2. Polinomlarla Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri



Bilgi

Polinomlarla toplama ya da çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

Örneğin $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$P(x)$ polinomunun bir terimi $a \cdot x^m$, $Q(x)$ polinomunun bir terimi $b \cdot x^m$ ise

$a \cdot x^m + b \cdot x^m = (a+b) \cdot x^m$ terimi $P(x)+Q(x)$ polinomunun bir terimidir.

$a \cdot x^m - b \cdot x^m = (a-b) \cdot x^m$ terimi $P(x)-Q(x)$ polinomunun bir terimidir.



Örnek 21

$P(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10$ ve $Q(x) = -4x^3 + 3x^2 + x - 2$ polinomları veriliyor.

a) $P(x) + Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.

b) $P(x) - Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.

c) $3 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

Polinomlarda toplama ya da çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları kendi aralarında toplanır ya da çıkarılır.

a) $P(x) + Q(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 - 4x^3 + 3x^2 + x - 2$

$= -7x^4 + (5-4)x^3 + (-8+3)x^2 + x + 10 - 2$

$= -7x^4 + x^3 - 5x^2 + x + 8$ olur.

b) $P(x) - Q(x) = -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 - (-4x^3 + 3x^2 + x - 2)$

$= -7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10 + 4x^3 - 3x^2 - x + 2$

$= -7x^4 + (5+4)x^3 + (-8-3)x^2 - x + 10 + 2$

$= -7x^4 + 9x^3 - 11x^2 - x + 12$ olur.

c) $3 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x) = 3 \cdot (-7x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 10) - 4(-4x^3 + 3x^2 + x - 2)$

$= -21x^4 + 15x^3 - 24x^2 + 30 + 16x^3 - 12x^2 - 4x + 8$

$= -21x^4 + (15+16)x^3 + (-24-12)x^2 - 4x + 30 + 8$

$= -21x^4 + 31x^3 - 36x^2 - 4x + 38$ olur.



Örnek 22

$P(x) \neq 0$, $Q(x) \neq 0$ ve $der[P(x)] \neq der[Q(x)]$ olmak üzere P(x) polinomunun derecesi m, Q(x) polinomunun derecesi n olduğuna göre $P(x)+Q(x)$ ve $P(x)-Q(x)$ polinomlarının derecesini birbiri ile büyüklük ve küçüklük bakımından kıyaslayarak m ve n cinsinden bulunuz.



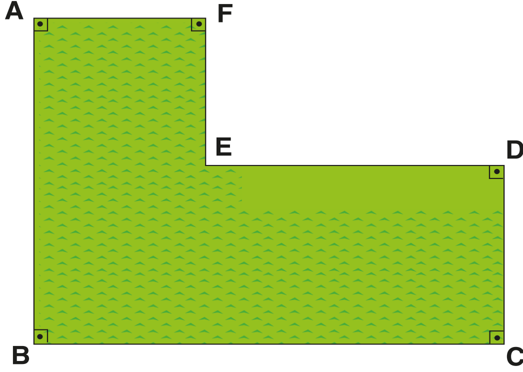
Çözüm

$m > n \Rightarrow der[P(x)+Q(x)] = m$ ve $der[P(x)-Q(x)] = m$ olur.

$m < n \Rightarrow der[P(x)+Q(x)] = n$ ve $der[P(x)-Q(x)] = n$ olur.



Örnek 23



Aysel Hanım'ın arsasının şekli yukarıdaki gibidir. Aysel Hanım arsasının [FE], [ED], [DC] kenarlarına bir sıra duvar ördürmek istiyor. $|AF| = 2x^5 + 3x^3 + 2x^2$, $|AB| = -x^5 + 10x^3 + x^2 + 200$ ve $|BC| = 3x^5 - 2x^3 + 3x^2$ metredir. Aysel Hanım'ın ördüreceği duvarın uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.



Çözüm

$|FE| + |DC| = |AB|$ olduğundan $|FE| + |DC| = -x^5 + 10x^3 + x^2 + 200$ metredir.

$|ED| = |BC| - |AF|$ olduğundan

$$|ED| = (3x^5 - 2x^3 + 3x^2) - (2x^5 + 3x^3 + 2x^2)$$
$$= 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^5 - 3x^3 - 2x^2$$
$$= x^5 - 5x^3 + x^2 \text{ metredir.}$$

Buradan $|FE| + |ED| + |DC| = \cancel{-x^5} + 10x^3 + x^2 + 200 + \cancel{x^5} - 5x^3 + x^2$
$$= 5x^3 + 2x^2 + 200 \text{ metredir.}$$

Aysel Hanım'ın ördüreceği duvarın uzunluğu $5x^3 + 2x^2 + 200$ metredir.



Örnek 24

P(x) bir polinom olmak üzere $P(x) + P(x+1) = 4x^2 - 6x + 13$ olduğuna göre P(2) değerini bulunuz.



Çözüm

$P(x) + P(x+1) = 4x^2 - 6x + 13$ eşitliğinin sağ tarafı 2. dereceden bir ifade belirtmektedir. $P(x)$ ve $P(x+1)$ polinomları aynı dereceye sahip polinomlar olacağından $P(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde 2. dereceden bir polinom seçilir. Buradan x yerine $x+1$ yazılırsa $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ elde edilir. Buradan

$$ax^2 + bx + c + a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 4x^2 - 6x + 13$$
$$ax^2 + bx + c + a \cdot (x^2 + 2x + 1) + bx + b + c = 4x^2 - 6x + 13$$
$$ax^2 + bx + c + ax^2 + 2ax + a + bx + b + c = 4x^2 - 6x + 13$$
$$2ax^2 + (2a + 2b)x + a + b + 2c = 4x^2 - 6x + 13 \text{ olur.}$$

İki polinomun eşitliğinden $2a = 4 \Rightarrow a = 2$,

$2\underbrace{a}_{2} + 2b = -6 \Rightarrow 2 \cdot (2) + 2b = -6 \Rightarrow b = -5$, $\underbrace{a}_{2} + \underbrace{b}_{-5} + 2c = 13 \Rightarrow 2 - 5 + 2c = 13 \Rightarrow c = 8$ olur.

Böylece $P(x) = 2x^2 - 5x + 8$ bulunur. P(x) polinomunda x yerine 2 yazılırsa

$P(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 8 = 8 - 10 + 8 = 6$ olur.

Polinomlarla Çarpma İşlemi



Bilgi

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere $P(x)\cdot Q(x)$ işlemi yapılırken P(x) polinomunun her terimi Q(x) polinomunun her terimiyle çarpılır ve elde edilen ifadelerin cebirsel toplamı x değişkeninin azalan ya da artan kuvvetlerine göre sıralanarak yazılır. Örneğin P(x) polinomuna ait herhangi bir terim $a\cdot x^m$ ve Q(x) polinomuna ait herhangi bir terim $b\cdot x^n$ ise $a\cdot x^m\cdot b\cdot x^n = a\cdot b\cdot x^{m+n}$ terimi $P(x)\cdot Q(x)$ polinomunun bir terimidir.



Örnek 25

$P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5$ ve $Q(x) = -2x^2 + 5x$ olarak veriliyor. $R(x) = P(x)\cdot Q(x)$ olduğuna göre R(x) polinomunu ve derecesini bulunuz.



Çözüm

$R(x) = (6x^3 - 4x^2 + 5)\cdot(-2x^2 + 5x)$

$= -12x^5 + 30x^4 + 8x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x$

$= -12x^5 + 38x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x$ olur. R(x) polinomunun derecesi ise $der[R(x)] = 5$ olur.



İpucu

$P(x) \neq 0$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n \Rightarrow der[P(x)\cdot Q(x)] = m + n$ olur.



Örnek 26

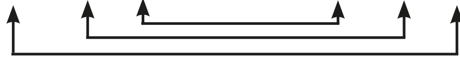
$P(x) = -5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7$ polinomu veriliyor. $P^2(x)$ polinomunun x^6 lı teriminin katsayısını bulunuz.



Çözüm

$P^2(x) = P(x)\cdot P(x)$ olur. Buradan

$P^2(x) = (-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)\cdot(-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)$ yazılıp bu çarpım sonucunda içinde x^6 lı terimler bulunduran ifadeler belirlenir. $(-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)\cdot(-5x^4 + 6x^3 - x^2 + 4x - 7)$ çarpımından



elde edilecek x^6 lı terim $-5x^4\cdot(-x^2) + 6x^3\cdot 6x^3 - x^2\cdot(-5x^4) = 5x^6 + 36x^6 + 5x^6 = 46x^6$ olur.

Buradan $P^2(x)$ polinomunun x^6 lı teriminin katsayısı 46 dır.



Örnek 27

P(x) ve Q(x) polinomları için $der[P^2(x)\cdot Q(x)]=13$ ve $der[P(x^3)\cdot Q^2(x)]=21$ olduğuna göre P(x) ve Q(x) polinomlarının derecelerini bulunuz.



Çözüm

$der[P(x)]=m$ ve $der[Q(x)]=n$ olsun.

$der[P^2(x)]=der[P(x)\cdot P(x)]=m+m=2m,\ der[P^2(x)\cdot Q(x)]=2m+n=13$ olur.........(I)

$der[P(x)]=m$ için P(x) polinomunun en büyük dereceli teriminin $a\cdot x^m$ $(a\neq 0)$ gibi bir terim olduğu düşünülürse $P(x^3)$ polinomunun en büyük dereceli terimi $a\cdot(x^3)^m=a\cdot x^{3m}$ olur. Buradan

$der[P(x^3)]=3m$ olur.

$der[Q^2(x)]=der[Q(x)\cdot Q(x)]=n+n=2n$ olur.

$der[P(x^3)\cdot Q^2(x)]=3m+2n=21$ olur.........(II)

I ve II numaralı denklemler yok etme yöntemi kullanılarak çözülürse

$$
\begin{array}{rl}
(-2)/ & 2m+n=13\ /(-2) \\
+ & 3m+2n=21 \\
\hline
 & -4m-2n=-26 \\
+ & 3m+2n=21 \\
\hline
 & -m=-5 \Rightarrow m=5 \text{ olur.}
\end{array}
$$

(I numaralı eşitliğin her iki tarafı -2 çarpılıp II numaralı eşitlikle taraf tarafa toplanır.)

Bulunan m değeri $2m+n=13$ denkleminde yerine yazılırsa $2\cdot 5+n=13\Rightarrow n=3$ olur.

Buradan $der[P(x)]=m=5$ ve $der[Q(x)]=n=3$ olur.

Polinomlarla Bölme İşlemi



Bilgi

P(x) ve $Q(x)\neq 0$ polinomları için $der[P(x)]\geq der[Q(x)]\geq 1$ olmak üzere P(x) polinomunun Q(x) polinomu ile bölümü aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$
\begin{array}{r|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
-\ B(x)\cdot Q(x) & B(x) \\ \cline{1-1}
K(x) &
\end{array}
$$

$P(x)$: Bölünen polinom,

$Q(x)$: Bölen polinom,

$B(x)$: Bölüm polinomu,

$K(x)$: Kalan polinomudur.

Yukarıda verilen bölme işleminde

- $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$ olur. Bu eşitliğe bölme eşitliği denir.
- $K(x)=0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam (kalansız) bölünüyor denir.
- $der[K(x)]<der[Q(x)]$ olur.
- $der[B(x)]=der[P(x)]-der[Q(x)]$ olur.



Örnek 28

$P(x)$ polinomunun $Q(x) = 2x - 1$ polinomuna bölümünde, bölüm $4x + 1$ ve kalan 5 olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.



Çözüm

Bölünen P(x), bölen Q(x), bölüm B(x), kalan K(x) polinomu olmak üzere $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olur.
Verilen değerler $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$P(x) = (2x - 1) \cdot (4x + 1) + 5$

$P(x) = 8x^2 + 2x - 4x - 1 + 5$

$P(x) = 8x^2 - 2x + 4$ olur.



İpucu

Polinomlarda bölme işlemi aşağıda verilen sıralamaya uygun yapılır.

- Bölünen ve bölen polinom bu polinomların değişkeninin azalan kuvvetlerine göre yazılır.
- Bölünen polinomun en büyük dereceli terimi bölen polinomun en büyük dereceli terimine bölünür ve elde edilen sonuç bölüm polinomunun ilk terimi olarak yazılır.
- Bölüm polinomuna ait bulunan ilk terim, bölen polinomla çarpılır ve elde edilen ifade bölünen polinomdan çıkarılır.
- Yukarıdaki işlemler, çıkarma işlemi sonucunda elde edilen her polinoma kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük oluncaya kadar uygulanır.



Örnek 29

$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2$ ve $Q(x) = x^2 + x - 1$ polinomları veriliyor. $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarını bulunuz.



Çözüm

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^2 + x - 2 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{2x^4 + 2x^3 - 2x^2} & 2x^2 - 2x + 1 \\
-2x^3 - x^2 + x - 2 & \\
-\ \underline{-2x^3 - 2x^2 + 2x} & \\
x^2 - x - 2 & \\
-\ \underline{x^2 + x - 1} & \\
-2x - 1 &
\end{array}
$$

$x^2 = x^2 \cdot 1$ “x^2 ile 1 in çarpımı 5. satırdaki polinomun ilk terimini verir.”

$-2x^3 = -2x \cdot x^2$ “x^2 ile $-2x$ in çarpımı 3. satırdaki polinomun ilk terimini verir.”

$2x^4 = x^2 \cdot 2x^2$ “x^2 ile $2x^2$ nin çarpımı bölünen polinomun ilk terimini verir.”

Bölme işlemi sonucunda elde edilen bölüm polinomu $B(x) = 2x^2 - 2x + 1$, kalan polinomu ise $K(x) = -2x - 1$ olur.



Örnek 30

$x > 0$ olmak üzere A ve B şehirleri arası uzaklık $2x^3 + 15x^2 + 34x + 24$ kilometredir. A şehrinden B şehrine $x + 1$ saatte gidip $x + 2$ saatte tekrar A şehrine dönen bir aracın gidiş ve dönüş boyunca ortalama hızını x cinsinden bulunuz.



Çözüm

Bir aracın belirli bir yol boyunca ortalama hızı $V_{ort} = \dfrac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$ formülü ile hesaplanacağından

$$V_{ort} = \frac{(2x^3 + 15x^2 + 34x + 24) + (2x^3 + 15x^2 + 34x + 24)}{(x + 1) + (x + 2)}$$

$V_{ort} = \dfrac{4x^3 + 30x^2 + 68x + 48}{2x + 3}$ olur. Bölme işlemi kullanılarak

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 30x^2 + 68x + 48 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} -\; 4x^3 + 6x^2 \quad\quad\quad\quad & 2x^2 + 12x + 16 \\ \hline 24x^2 + 68x + 48 & \\ -\; 24x^2 + 36x \quad\;\; & \\ \hline 32x + 48 & \\ -\; 32x + 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$V_{ort} = 2x^2 + 12x + 16$ km/sa bulunur.



Örnek 31

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x - 1) \cdot P(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 12$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunu bulunuz.



Çözüm

$(x - 1) \cdot P(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 12$ eşitliğinde x yerine 1 yazılarak a değeri bulunur.

$x = 1$ için $(1 - 1) \cdot P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 12$

$0 = a - 17$

$a = 17$ olur.

Bulunan a değeri verilen eşitlikte yerine yazılıp eşitliğin her iki tarafı $(x - 1)$ ile bölünerek $P(x)$ polinomu elde edilir. $\dfrac{\cancel{(x-1)} \cdot P(x)}{\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 17x - 12}{x - 1} \Rightarrow P(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 17x - 12}{x - 1}$ olur. Buradan

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 17x - 12 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\; x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad\;\; & x^2 - 5x + 12 \\ \hline -5x^2 + 17x - 12 & \\ -\; -5x^2 + 5x \quad\quad\; & \\ \hline 12x - 12 & \\ -\; 12x - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = x^2 - 5x + 12$ olur.



Örnek 32

$P(x)$, $Q(x)$ ve $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $(Q(x) \neq 0)$ birer polinomdur. $der[(x^3+x) \cdot P(x) \cdot Q^2(x)] = 14$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 5$ olduğuna göre $der[P(x) - Q(x)]$ in kaç olduğunu bulunuz.



Çözüm

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olsun.

$der[(x^3+x) \cdot P(x) \cdot Q^2(x)] = der[(x^3+x)] + der[P(x)] + der[Q^2(x)]$

$= 3 + m + 2n = 14$ ise $m + 2n = 11$ olur. ....(I)

$der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = der[P(x)] - der[Q(x)]$

$= m - n = 5$ olur. ....(II)

(I) ve (II) numaralı denklemler yok etme yöntemi ile çözülürse

$$\begin{array}{rr} & m + 2n = 11 \\ + \quad (-1)/ & m - n = 5/(-1) \\ \hline & m + 2n = 11 \\ + & -m + n = -5 \\ \hline & 3n = 6 \\ & n = 2 \text{ olur.} \end{array}$$

$m - n = 5$ ifadesinde $n = 2$ için $m - 2 = 5 \Rightarrow m = 7$ olur. Buradan $der[P(x) - Q(x)] = 7$ olur.



Örnek 33

$P(x) = 2x^4 - 6x^2 - 5x + 7$ polinomunun $Q(x) = x - 2$ polinomu ile bölümünden elde edilecek kalanı bölüm polinomunu bulmadan (bölme işlemi yapmadan) bulunuz.



Çözüm

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-2 \\ \cline{2-2} - \quad & B(x) \\ \hline K(x) & \end{array} \Rightarrow \quad P(x) = (x-2) \cdot B(x) + K(x) \text{ olur.}$$

$der[K(x)] < der[Q(x)]$ olacağından $K(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ olur.

$P(x) = (x-2) \cdot B(x) + c$ eşitliğinde x yerine 2 yazılarak

$P(2) = (2-2) \cdot B(2) + c$

$P(2) = c$ bulunur.

Buradan $P(2) = 2 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 7$

$P(2) = 32 - 24 - 10 + 7$

$P(2) = 5$ olur.

$P(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan $P(2) = c = 5$ olur.



Bilgi

- Bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır.
- $P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.
- $x=a$ için $P(a)=0$ ise $x=a$ sayısına, $P(x)$ **polinomunun sıfırı (bir kökü)** denir.



Örnek 34

$P(x)=x^3-2x^2+6x-5$ polinomunun bir çarpanının $(x-1)$ olduğunu gösteriniz ve $P(x)$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$P(x)=x^3-2x^2+6x-5$ polinomunun bir çarpanının $(x-1)$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

"$P(1)=0 \Leftrightarrow (x-1)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır." bileşik önermesinin denk olduğu önerme,

"$P(1)=0$ ise $(x-1)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır ve $(x-1)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanı ise $P(1)=0$ dır."

$x-1=0$ ise $x=1$ olur.

$$\left.\begin{aligned} P(1)&=1^3-2\cdot 1^2+6\cdot 1-5\\ P(1)&=1-2+6-5\\ P(1)&=0 \text{ bulunur.}\end{aligned}\right\} \text{..........(I)}$$

Bu durum bölme işlemi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{x^3-2x^2+6x-5}^{P(x)} & x-1 \\ \hline -\;\; x^3-x^2 & x^2-x+5 \\ \hline -x^2+6x-5 & \\ -\;\; -x^2+x & \\ \hline 5x-5 & \\ -\;\; 5x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Buradan $P(x)=(x-1)\cdot(x^2-x+5)$ olur. ....(II)

(I) ve (II) numaralı denklemlerden $P(1)=0$ ise $(x-1)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanı olup $(x-1)$, $P(x)$ polinomunu tam böler. Buradan $P(1)=0$ olur.



Örnek 35

$P(x) = 7x^3 + 6x^2 + 8x + 9$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ değeri, $P(x)$ polinomunda yerine yazılırsa

$P(-1) = 7 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 9$

$P(-1) = -7 + 6 - 8 + 9$

$P(-1) = 0$ olur.

$P(x)$ polinomu $x + 1$ ile tam bölündüğünden $x = -1$ sayısının $P(x) = 0$ denkleminin sıfırı olduğuna ve $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$ şeklinde yazılabileceğine dikkat ediniz.



Örnek 36

Bir $P(x)$ polinomu için aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

- $P(x)$ polinomu 3. dereceden bir polinomdur.
- $P(x)$ polinomunun sıfırları (kökleri) $2, -2$ ve -1 dir.
- $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı 12 dir.

Verilen bu bilgilere göre

a) $P(x)$ polinomunu yazınız.

b) $P(x^2 + 3)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.



Çözüm

a) $P(x)$ polinomunun sıfırları $2, -2$ ve -1 olduğundan bu polinom $(x - 2), (x + 2)$ ve $(x + 1)$ ifadelerinin her birine tam bölünür. Dolayısıyla bu üç ifade $P(x)$ polinomunun çarpanlarıdır.

Buradan $P(x) = Q(x) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ olarak ifade edilebilir.

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ çarpımı 3. dereceden olduğundan $Q(x)$ polinomu bir sabit polinomdur.

Buradan $Q(x) = c$ yazılabilir. Bu durumda $P(x) = c \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ olur.

$P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 12 olduğundan $P(1) = 12$ olur.

$P(1) = c \cdot (1 - 2) \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 1) = 12$

$-6 \cdot c = 12$

$c = -2$ için $P(x) = -2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$ olur.

b) $P(x^2 + 3)$ polinomunun sabit terimi $P(0^2 + 3) = P(3)$ olur. Buradan $P(3) = -2 \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 2) \cdot (3 + 1) \Rightarrow P(3) = -40$ olur.



Örnek 37

$P(x + 3) = -x^2 + 6x + 11$ polinomunun $x - 5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ değeri $P(x + 3)$ polinomunda x yerine yazılırsa

$P(5 + 3) = -5^2 + 6 \cdot 5 + 11 \Rightarrow P(8) = -25 + 30 + 11 \Rightarrow P(8) = 16$ olur.



Örnek 38

$P(x-1) = 2x^5 + 6x^4 - 3x + 7$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(2x+3)$ polinomunun $2x+6$ ile bölümünden kalanı bulunuz.



Çözüm

$2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ olur.

$x = -3$ değeri $P(2x+3)$ polinomunda x yerine yazılarak kalan bulunur.

Kalan $P(2 \cdot (-3) + 3) = P(-3)$ olur.

$x - 1 = -3$ için $x = -2$ değeri $P(x-1)$ polinomunda yerine yazılırsa

$P(-2-1) = 2 \cdot (-2)^5 + 6 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2) + 7$

$P(-3) = -64 + 96 + 6 + 7 \Rightarrow P(-3) = 45$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. $P(x) = -3x^3 + 6x^2 - 7x + 2$ ve $Q(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - x$ polinomları veriliyor. Buna göre

a) $x \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.

b) $-2 \cdot P(x) + x^2 \cdot Q(x)$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $a \neq 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(-4x^5 + ax^4 - 2x^3 + 3) \cdot (x^2 - 3x + 4)$ çarpımından elde edilen ifadede x^5 li terimin katsayısı -6 olduğuna göre a sayısının değerini bulunuz.

3. $P(x) = -5x^5 + 3x^4 - x^2 - 6x + 4$ polinomunun $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu ve kalan polinomunun toplamını bulunuz.

4.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline - \quad & B(x) \\ \hline 2x^3 - x^2 + 1 & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde $Q(x)$ ve $B(x)$ polinomlarının derecesi eşit olduğuna göre $\text{der}[P^2(x) \cdot Q(x)]$ in alabileceği **en küçük** değeri bulunuz.

5. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$ polinomu veriliyor. Buna göre

a) $P(x)$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

b) $P(x-3)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

c) $x^2 \cdot P^2(x-2)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

6. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x-2) \cdot P(x+3) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$ eşitliğini sağlayan $P(x+3)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

7. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomu ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.
- $P(x)$ polinomu x^2+1 ile tam bölünen bir polinomdur.
- $P(x)$ polinomunun baş katsayısı -2 dir.
- $P(x)$ polinomunun sabit terimi -12 dir.

Bu bilgiler yardımıyla

a) $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamını bulunuz.

b) $P(x+3)$ polinomunun $x+5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

8. $P(x)=x+4$ polinomu veriliyor.
$24\cdot P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)\cdot\ ...\ \cdot P(24)$ çarpımının sonucunu bulunuz.

9. $P(x)=x^4+8x^3+22x^2+24x+9$ polinomunun kareköklerinden biri x^2+mx+n olduğuna göre $m+n$ nin alabileceği değeri bulunuz..

10. $P(x)\neq 0$ ve $\text{der}[P(x)]>1$ olmak üzere
$Q(x)=(x^2+4x+2)\cdot P(x)+6x-2$
olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun $P(x)$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarının toplamını bulunuz.

11. $Q(x)$ bir polinom olmak üzere
$Q(x-1)+Q(x+1)=-6x+10$ olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun $x+5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

12. Bir $P(x)$ polinomunun x^2-25 ile bölümünden kalan $2x+6$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

13. $P(x)$ bir polinomdur.
$P(2x)-P(-2x)=-8x^3+12x+17$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamını bulunuz.

14. 2. dereceden $Q(x)$ polinomu, $x-2$ ve $x-3$ ile tam bölünen bir polinomdur. Buna göre $\dfrac{Q(5)}{Q(1)}$ değerini bulunuz.

15. $P(x)=-2x^9+6x^6-3x^5+x^3+9x^2+1$
polinomunun $x-\sqrt[3]{3}$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

10.3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Terimler ve Kavramlar

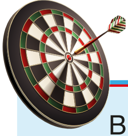
- Çarpan
- Özdeşlik
- Değişken Değiştirme
- Rasyonel İfade



Neler Öğreneceksiniz?

- Bir polinomu çarpanlarına ayırmayı,
- Rasyonel ifadelerin sadeleştirilmesi ile ilgili işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

10.3.2.1. Bir Polinomu Çarpanlarına Ayırma



Bilgi

Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

$P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ şeklinde ifade edilen eşitlikte $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarına **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Ortak Çarpan Parantezine Alma



Bilgi

Bir polinomun her teriminde bulunan ortak çarpanın paranteze alınması işlemine **ortak çarpan parantezine alma yoluyla çarpanlara ayırma yöntemi** denir.

$A(x), B(x)$ ve $C(x)$ birer polinom olmak üzere
$A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x) = A(x) \cdot [B(x) + C(x)]$ olur.



Örnek 1

Aşağıda verilen ifadelerin ortak çarpan parantezine alma yöntemi ile çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.

a) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ax - bx + cx$

b) $2x^3 + 8x^2 - 6x$

c) $a^3 + a^4 + a^5$

ç) $2x^2 - 6x$



Çözüm

a) $ax - bx + cx$ ifadesinin tüm terimlerinin ortak çarpanı x tir. Buna göre $ax - bx + cx = x \cdot (a - b + c)$ olur.

b) $2x^3 + 8x^2 - 6x$ ifadesinin tüm terimlerinin ortak çarpanı $(2x)$ tir. Buna göre
$2x^3 + 8x^2 - 6x = 2x(x^2 + 4x - 3)$ olur.

c) $a^3 + a^4 + a^5$ ifadesinin tüm terimlerinin ortak çarpanı a^3 olup $a^3 + a^4 + a^5 = a^3(1 + a + a^2)$ olur.

ç) $2x^2 - 6x$ ifadesinin tüm terimlerinin ortak çarpanı $(2x)$ olup $2x^2 - 6x = (2x) \cdot (x - 3)$ olur.



Örnek 2

$m, n \in \mathbb{R}$, $m \cdot (x - 2) - n \cdot (2 - x)$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.



Çözüm

$m \cdot (x - 2) - n \cdot (2 - x)$ ifadesinde $2 - x = -(x - 2)$ olur. Buradan
$m \cdot (x - 2) - n \cdot (-(x - 2)) = m \cdot (x - 2) + n \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot (m + n)$ olur.



Örnek 3

$(x - 1)^3 - (1 - x)^2$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.



Çözüm

$(x - 1)^3 - (1 - x)^2$ ifadesinde $(x - y)^2 = (y - x)^2$ olduğundan
$(x - 1)^3 - (x - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 1 - 1) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$ olur.



Örnek 4

$(x - 2)^3 \cdot (x - 1)^2 - (2 - x)^2 \cdot (1 - x)^3$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.



Çözüm

$(x - 2)^3 \cdot (x - 1)^2 - (2 - x)^2 \cdot (1 - x)^3$ ifadesinde $(x - 2)^2 = (2 - x)^2$ ve $(x - 1)^2 = (1 - x)^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}(x - 2)^3 \cdot (x - 1)^2 - (2 - x)^2 \cdot (1 - x)^3 &= (x - 2)^2 \cdot (1 - x)^2 \cdot [(x - 2) - (1 - x)] \\ &= (x - 2)^2 \cdot (1 - x)^2 \cdot [x - 2 - 1 + x] \\ &= (x - 2)^2 \cdot (1 - x)^2 \cdot (2x - 3) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Gruplandırma Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma



Bilgi

Verilen polinomun her teriminde ortak bir sayı, ortak bir değişken veya ortak bir terim bulunmuyor ise ortak çarpanı olan terimler bir araya getirilerek gruplandırılır. Her grup parantez içindeki ifadeleri aynı olacak biçimde çarpanlarına ayrılır. Sonra gruplar, ortak çarpan parantezine alınır.



Örnek 5

Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^4 + x^3 - x^2 - x$

b) $x^3 + x^2 - x - 1$



Çözüm

a) $x^4 + x^3 - x^2 - x$ ifadesinde ilk iki terim x^3 parantezine, son iki terim $-x$ ortak çarpan parantezine alınırsa $x^3(x+1) - x(x+1)$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede $(x+1)$ ortak çarpanı bulunduğundan $x^4 + x^3 - x^2 - x$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şekli $(x+1)\cdot(x^3 - x) = (x+1)\cdot x\cdot(x^2-1) = (x+1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ olur. Buradan $x^4 + x^3 - x^2 - x = (x+1)\cdot x\cdot(x^2-1) = (x+1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ olur.

b) $x^3 + x^2 - x - 1$ ifadesinde ilk iki terim x^2 parantezine, son iki terim -1 ortak çarpan parantezine alınırsa $x^2\cdot(x+1) - 1\cdot(x+1)$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede $(x+1)$ ortak çarpanı bulunduğundan $x^3 + x^2 - x - 1$ ifadesinin çarpanlara ayrılmış şekli $(x+1)\cdot(x^2-1)$ olur. Buradan $x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)\cdot(x^2-1) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1) = (x-1)\cdot(x+1)^2$ olur.

Özdeşlikler Yardımıyla Çarpanlarına Ayırma



İpucu

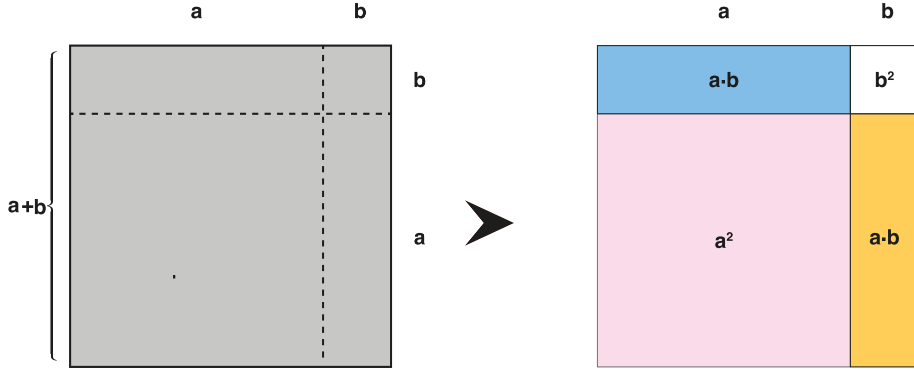
Tam Kare Özdeşliği

$(x+y)^2$ ve $(x-y)^2$ biçimindeki ifadelere **tam kare ifadeler** denir.

$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ve
$(x-y)^2 = (x-y)\cdot(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ olur.

Düşünüyorum

Tam kare özdeşliği ile ilgili aşağıdaki modellemeleri inceleyiniz.



Bir kenar uzunluğu $a+b$ birim olan bir karenin alanı $(a+b)^2$ dir. Bu kare, şekildeki gibi dört parçaya ayrılırsa elde edilen alanların toplamının $a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$ olduğu görülür. Buradan $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ olur.

Siz de $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ özdeşliğini uygun bir modelleme ile gösteriniz.



Örnek 6

Aşağıda verilen ifadelerin açılımlarını tam kare özdeşliğini kullanarak yapınız.

a) $(2x-3)^2$ **b)** $(a-2)^2$ **c)** $(2x+5)^2$



Çözüm

a) $(2x-3)^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot3+3^2=4x^2-12x+9$ olur.

b) $(a-2)^2=a^2-2\cdot a\cdot 2+2^2=a^2-4a+4$ olur.

c) $(2x+5)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot5+5^2=4x^2+20x+25$ olur.



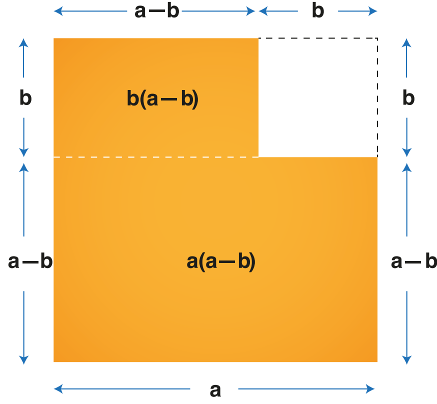
İpucu

İki Kare Farkı Özdeşliği

x^2-y^2 ifadesine **iki kare farkı durumundaki ifade** denir.
$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$ olur.

Düşünüyorum

İki kare farkı özdeşliği ile ilgili aşağıdaki modellemeyi inceleyiniz.



Bir kenarı a birim olan karenin herhangi bir köşesinden bir kenarı b birim olan bir kare çıkarılırsa geriye kalan şeklin alanı (a^2-b^2) olur. Şekildeki gibi elde edilen iki farklı dikdörtgenin alanları toplamının $a(a-b)+b(a-b)=(a-b)\cdot(a+b)$ olduğu görülür. Buradan $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ olur.



Örnek 7

Aşağıda verilen ifadeleri iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

a) x^2-5^2 **b)** $16a^2-49$ **c)** x^2-5 **ç)** x^2-1



Çözüm

a) $x^2-5^2=(x-5)\cdot(x+5)$ olur.

b) $16a^2-49=(4a)^2-7^2=(4a-7)\cdot(4a+7)$ olur.

c) $x^2-5=x^2-(\sqrt{5})^2=(x-\sqrt{5})\cdot(x+\sqrt{5})$ olur.

ç) $x^2-1=x^2-1^2=(x-1)\cdot(x+1)$ olur.



Örnek 8

27^2-13^2 ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

27^2-13^2 ifadesi iki kare farkı kullanılarak çarpanlarına ayrılırsa
$27^2-13^2=(27-13)\cdot(27+13)=14\cdot40=560$ olur.



Örnek 9

$30^2-27^2=19\cdot p$ eşitliğinde p gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

30^2-27^2 ifadesi iki kare farkı kullanılarak çarpanlarına ayrılırsa
$(30-27)\cdot(30+27)=19\cdot p \Rightarrow 3\cdot 57=19\cdot p \Rightarrow p=9$ olur.



Örnek 10

$A=(3^2+1)\cdot(3^4+1)\cdot(3^8+1)\cdot\ldots\cdot(3^{32}+1)$ olduğuna göre 3^{64} ifadesinin A cinsinden değerini bulunuz.



Çözüm

$A=(3^2+1)\cdot(3^4+1)\cdot(3^8+1)\cdot\ldots\cdot(3^{32}+1)$ eşitliğin her iki tarafı (3^2-1) ile çarpılırsa

$$(3^2-1)\cdot A=\underbrace{(3^2-1)\cdot(3^2+1)}_{(3^4-1)}\cdot(3^4+1)\cdot(3^8+1)\cdot\ldots\cdot(3^{32}+1)$$

$$=\underbrace{(3^4-1)\cdot(3^4+1)}_{(3^8-1)}\cdot(3^8+1)\cdot\ldots\cdot(3^{32}+1)$$

$$=\underbrace{(3^8-1)\cdot(3^8+1)}_{(3^{16}-1)}\cdot\ldots\cdot(3^{32}+1)$$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$=(3^{64}-1)$ olur. Buradan $8\cdot A=3^{64}-1 \Rightarrow 3^{64}=8\cdot A+1$ olur.



İpucu

İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

$(x+y)^3=(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ olur.
Buradan $x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)$ elde edilir.

$(x-y)^3=(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ olur.
Buradan $x^3-y^3=(x-y)^3+3x^2y-3xy^2=(x-y)^3+3xy(x-y)$ elde edilir.



Örnek 11

Aşağıda verilen ifadelerin açılımlarını özdeşlikleri kullanarak yapınız.

a) $(x+2)^3$ **b)** $(x+3)^3$ **c)** $(a-1)^3$ **ç)** $(2a-1)^3$



Çözüm

a) $(x+2)^3=x^3+3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$ olur.

b) $(x+3)^3=x^3+3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2+3^3=x^3+9x^2+27x+27$ olur.

c) $(a-1)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot 1+3\cdot a\cdot 1^2-1^3=a^3-3a^2+3a-1$ olur.

ç) $(2a-1)^3=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 1+3\cdot 2a\cdot 1^2-1^3=8a^3-12a^2+6a-1$ olur.



İpucu

İki Terimin Küplerinin Toplamı ve Farkının Özdeşliği

x^3+y^3 ifadesine **iki terimin küplerinin toplamı** denir. $x^3+y^3=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)$ olur.

x^3-y^3 ifadesine **iki terimin küplerinin farkı** denir. $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$ olur.



Örnek 12

Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^3 - 3^3$ **b)** $8a^3 - 125$ **c)** $a^3 + 64$



Çözüm

a) $x^3 - 3^3 = (x-3)\cdot(x^2 + 3x + 3^2) = (x-3)\cdot(x^2 + 3x + 9)$ olur.

b) $8a^3 - 125 = (2a)^3 - 5^3 = (2a-5)\cdot((2a)^2 + 2a\cdot 5 + 5^2) = (2a-5)\cdot(4a^2 + 10a + 25)$ olur.

c) $a^3 + 64 = a^3 + (4)^3 = (a+4)\cdot(a^2 - 4\cdot a + 4^2) = (a+4)\cdot(a^2 - 4a + 16)$ olur.



İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c$ şeklindeki üç terimliler çarpanlarına ayrılırken a ve c nin çarpanlarına bakılır.

$a = k\cdot t$ ve $c = m\cdot n$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$

kx ↖↗ m
tx ↙↘ n

ve $kn + tm = b$ olacak biçimde $m, n, k, t \in R$ sayıları bulunabiliyorsa

$ax^2 + bx + c = (kx + m)\cdot(tx + n)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.



Örnek 13

Aşağıda verilen polinomların çarpanlarına ayrılmış şeklini bulunuz.

a) $x^2 - 4x + 4$ **b)** $8x^2 - 10x + 3$ **c)** $x^2 - 5mx - 6m^2$



Çözüm

a) $x^2 - 4x + 4$

x ✕ −2
x ✕ −2

$x^2 = x\cdot x,\ 4 = (-2)\cdot(-2)$ ve $-4x = (-2x) + (-2x)$ olduğundan $x^2 - 4x + 4 = (x-2)\cdot(x-2)$ olur.

b) $8x^2 - 10x + 3$

4x ✕ −3
2x ✕ −1

$8x^2 = (4x)\cdot(2x),\ 3 = (-3)\cdot(-1)$ ve $-10x = (-4x) + (-6x)$ olduğundan
$8x^2 - 10x + 3 = (4x-3)\cdot(2x-1)$ olur.

c) $x^2 - 5mx + 6m^2$

x ✕ −3m
x ✕ −2m

$x^2 = x\cdot x,\ 6m^2 = (-3m)\cdot(-2m)$ ve $-5mx = (-3mx) + (-2mx)$ olduğundan
$x^2 - 5mx + 6m^2 = (x-3m)\cdot(x-2m)$ olur.



Örnek 14

Lise öğrencisiyken matematik dersini çok seven Ayşe Hanım, 10. sınıfta okuyan oğlu Eren'in okulda matematik dersinde çarpanlara ayırma konusunu işlediklerini öğrenince bu konuyla ilgili Eren'in bilgisini ölçmek amacıyla bir arsaya ait aşağıdaki bilgileri veriyor.

- Arsa dikdörtgen şeklindedir.
- Arsanın köşegen uzunluğu 20 metredir.
- Arsanın çevre uzunluğu 56 metredir.

Bu bilgiler doğrultusunda Ayşe Hanım, Eren'den

a) Arsanın alanının kaç metrekare olduğunu bulmasını istiyor.

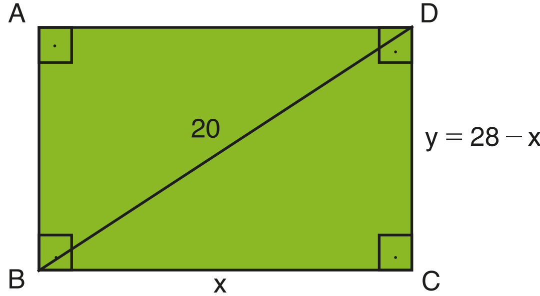
b) Arsanın sadece çevre uzunluğu verilseydi alanının en çok kaç metrekare olabileceğini bulmasını istiyor.

Soruları doğru cevaplayan Eren'in bu sorulara verdiği cevapları bulunuz.



Çözüm

a) Kenar uzunlukları x ve y metre olan bir ABCD dikdörtgeni çizilerek verilen bilgiler aşağıdaki gibi yerleştirilir.
ABCD dikdörtgeninin çevresi $2\cdot(|BC|+|CD|)=56 \Rightarrow |BC|+|CD|=28$ bulunur. Buradan $|BC|=x$ metre olsun. Bu durumda $|CD|=y=(28-x)$ metre olur. Bu değerler aşağıdaki gibi modellenirse



$\widehat{BCD}$ nde Pisagor teoremi uygulanarak $x^2+(28-x)^2=20^2$ eşitliği elde edilir.
Buradan $x^2+(28-x)^2=400 \Rightarrow x^2+784-56x+x^2=400 \Rightarrow 2x^2-56x+384=0$ olup bu ifade çarpanlarına ayrılır.

$2x^2-56x+384=0 \Rightarrow 2\cdot(x^2-28x+192)=0 \Rightarrow 2\cdot(x-12)\cdot(x-16)=0$ olur.

$$\begin{matrix} x & & -12 \\ x & & -16 \end{matrix}$$

Buradan $x=12$ veya $x=16$ bulunur. Bu değerlerin her biri için $A(ABCD)=x\cdot(28-x)$ ifadesinin değeri 192 metrekaredir.

b) ABCD dikdörtgeninin çevresi $2\cdot(|BC|+|CD|)=56 \Rightarrow |BC|+|CD|=28$ bulunur. Toplamları verilen iki sayının çarpımlarının en büyük olabilmesi için birbirlerine en yakın değerleri alması gerekir. Buradan $|BC|=14$ ve $|CD|=14$ seçilirse bu koşullarda verilen arsanın alanı en çok $|BC|\cdot|CD|=196$ metrekare olur.

Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma



İpucu

Bir polinomda benzer terimlerin yeni bir değişkenle adlandırılıp daha sade bir hâle getirildikten sonra çarpanlara ayrılması işlemine **değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlara ayırma yöntemi** denir.



Örnek 15

$x^4 + x^2 - 2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.



Çözüm

$x^4 + x^2 - 2 = (x^2)^2 + x^2 - 2$ şeklinde düzenlenip $(x^2)^2 + x^2 - 2$ ifadesinde x^2 yerine a değişkeni yazılırsa $a^2 + a - 2$ elde edilir.

Elde edilen bu ifade çarpanlarına ayrılırsa $(a+2) \cdot (a-1)$ olur.

a yerine tekrar x^2 yazılırsa $(x^2+2) \cdot (x^2-1) = (x^2+2) \cdot [(x-1) \cdot (x+1)]$ olur.

$x^4 + x^2 - 2 = (x^2+2) \cdot (x^2-1) = (x^2+2) \cdot [(x-1) \cdot (x+1)]$ olduğu görülür.



Örnek 16

$(x^2-4x)^2 - 2(x^2-4x) - 15$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.



Çözüm

$(x^2-4x)^2 - 2(x^2-4x) - 15$ ifadesinde (x^2-4x) yerine a değişkeni yazılırsa $a^2 - 2a - 15$ olur.

Elde edilen bu ifade çarpanlarına ayrılırsa $(a-5) \cdot (a+3)$ olur.

a yerine tekrar (x^2-4x) yazılırsa $(x^2-4x-5) \cdot (x^2-4x+3)$ olur.

Buradan $[(x-5) \cdot (x+1)] \cdot [(x-3) \cdot (x-1)]$ elde edilir.

$(x^2-4x)^2 - 2(x^2-4x) - 15 = (x-5) \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-1)$ olduğu görülür.



Örnek 17

$\sqrt{96 \cdot 112 + 64}$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

96 sayısı x ile gösterilirse $112 = x + 16$ olur. Bu değerler $\sqrt{96 \cdot 112 + 64}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$\sqrt{x \cdot (x+16) + 64} = \sqrt{x^2 + 16x + 64} = \sqrt{(x+8)^2} = |x+8|$ olur.

Bu ifadede x yerine 96 yazılırsa $|96+8| = 104$ olur.



Örnek 18

$\sqrt{18\cdot 20\cdot 22\cdot 24+16}$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

Verilen ifadede 18 yerine x yazılırsa $20=x+2,\ 22=x+4$ ve $24=x+6$ olur. Böylece $\sqrt{x\cdot(x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+6)+16}$ ifadesi elde edilir. Bu ifadeden ortak terim elde etmek için x ile $(x+6)$ ve $(x+2)$ ile $(x+4)$ terimleri çarpılır. Buradan

$$\sqrt{\underbrace{(x^2+6x)}_{a}\cdot(\underbrace{x^2+6x}_{a}+8)+16}=\sqrt{a\cdot(a+8)+16}=\sqrt{a^2+8a+16}=\sqrt{(a+4)^2}=|a+4|=|x^2+6x+4|$$

bulunur. $|x^2+6x+4|$ ifadesinde x yerine 18 yazılırsa $|18^2+6\cdot 18+4|=|436|=436$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. m gerçek sayı olmak üzere $(x-5)^3\cdot(m-7)^2-(5-x)^2\cdot(7-m)^3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

2. $\sqrt{85\cdot 115+225}$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. $999\cdot 1001$ çarpımını iki kare özdeşliği kullanarak yazınız.

4. $(x+8)^2-(1-x)^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

5. $3x^2-4x-32$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

6. $a^8-a^4+a^2+1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

7. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

10.3.2.2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi



Bilgi

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere **rasyonel ifadeler** denir.

Rasyonel ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri rasyonel sayılarda olduğu gibi yapılır.

Rasyonel ifadelerde önce pay ve paydadaki ifadeler çarpanlarına ayrılır varsa ortak olan çarpanlar sadeleştirilir.



Örnek 19

$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ rasyonel ifadesinde pay ve paydalar çarpanlarına ayrılırsa $\dfrac{(x-3)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+4)}$ olur.

Pay ve paydadaki ortak çarpanlar sadeleştirilirse verilen rasyonel ifadenin en sade hâli,

$\dfrac{(x-3)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$ olur.



Örnek 20

$\dfrac{a^2+6a}{a^2-36}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{a^2+6a}{a^2-36} = \dfrac{a\cdot\cancel{(a+6)}}{(a-6)\cdot\cancel{(a+6)}} = \dfrac{a}{a-6}$ olur.



Örnek 21

$\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x^2(x-2)-(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)} = \dfrac{(x-2)\cdot(x^2-1)}{(x-2)\cdot(x-1)} = \dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-1)}} = x+1$ olur.



Örnek 22

a, b gerçek sayılar olmak üzere $\dfrac{x^2+ax+3}{x^2+bx-12}$ rasyonel ifadesinin en sade hâli $\dfrac{x-1}{x+4}$ olduğuna göre $a+b$ değerini bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{x^2+ax+3}{x^2+bx-12}$ ifadesinin en sade hâli $\dfrac{x-1}{x+4}$ olduğundan payın bir çarpanı $x-1$ olup payı tam böler.

Buradan $x-1=0 \Rightarrow x=1$ değeri x^2+ax+3 ifadesinde yerine yazılırsa $1^2+a\cdot1+3=0 \Rightarrow a=-4$ olur.

Paydanın bir çarpanı $x+4$ olup $x+4$ paydayı tam böler. Buradan $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ değeri $x^2+bx-12$ ifadesinde yerine yazılırsa $(-4)^2+b\cdot(-4)-12=0 \Rightarrow -4b=-4 \Rightarrow b=1$ olur.
Buradan $a+b=-4+1=-3$ olur.



Örnek 23

a gerçek sayı olmak üzere $\dfrac{x^2+ax+12}{x^2-5x+6}$ ifadesi sadeleşebilir bir kesir olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.



Çözüm

$\dfrac{x^2+ax+12}{x^2-5x+6}$ ifadesi sadeleşebilir olduğundan paydanın çarpanlarından en az biri aynı zamanda payın da çarpanı olmak zorundadır. x^2-5x+6 ifadesinin çarpanları $(x-2)\cdot(x-3)$ olur.
$(x-2)$ payın bir çarpanı ise $x^2+ax+12$ polinomunu tam böler. Buradan
$x-2=0 \Rightarrow x=2$ olup $2^2+2a+12=0 \Rightarrow 4+2a+12=0 \Rightarrow 2a=-16 \Rightarrow a=-8$ olur.
$(x-3)$ payın bir çarpanı ise $x^2+ax+12$ polinomunu tam böler. Buradan
$x-3=0 \Rightarrow x=3$ olup $3^2+3a+12=0 \Rightarrow 9+3a+12=0 \Rightarrow 3a=-21 \Rightarrow a=-7$ olur.
Buradan a nın alabileceği değerler toplamı $(-8)+(-7)=-15$ olur.

Rasyonel İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri



İpucu

$Q(x)\neq0,\ T(x)\neq0$ iken $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\dfrac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere

a) Toplama işlemi $\dfrac{P(x)}{Q(x)}+\dfrac{R(x)}{T(x)}=\dfrac{P(x)\cdot T(x)+R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.

b) Çıkarma işlemi $\dfrac{P(x)}{Q(x)}-\dfrac{R(x)}{T(x)}=\dfrac{P(x)\cdot T(x)-R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.



Örnek 24

$\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}-\frac{2x^2+3x+1}{x^2-x-2}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$$\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}-\frac{2x^2+3x+1}{x^2-x-2}=\frac{x\cdot\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-2)}-\frac{(2x+1)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cdot\cancel{(x+1)}}=\frac{x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{x-2x-1}{x-2}=\frac{-x-1}{x-2}$$ olur.



Örnek 25

$\frac{3x-12}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ eşitliğini sağlayan A ve B gerçek sayılarını bulunuz.



Çözüm

Verilen eşitliğin sağ tarafında paydalar eşitlenirse

$$\frac{3x-12}{(x-1)\cdot(x+2)}=\underbrace{\frac{A}{(x-1)}}_{(x+2)}+\underbrace{\frac{B}{(x+2)}}_{(x-1)}\Rightarrow\frac{3x-12}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)\cdot(x+2)}$$ olur.

Eşitliğin her iki tarafında paydalar eşit olduğundan paylar da eşit olur.
$3x-12=(A+B)x+2A-B$ yazılır. İki polinomun eşitliğinden $A+B=3$ ve $2A-B=-12$ olur.
Bu iki denklem yok etme yöntemiyle aşağıdaki gibi çözülürse

$$\begin{array}{rl} & A+B=3 \\ + & 2A-B=-12 \\ \hline & 3A=-9 \\ & A=-3 \end{array}$$ olur.

$$A+B=3$$
$$-3+B=3$$
$$B=6$$ olur.

Rasyonel İfadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri



İpucu

$Q(x)\neq0,\ R(x)\neq0,\ T(x)\neq0$ iken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere

a) Çarpma işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.

b) Bölme işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{T(x)}{R(x)}=\frac{P(x)\cdot T(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$ biçiminde yapılır.



Örnek 26

$\frac{x^2-x-2}{x^2-x-12}\cdot\frac{x-4}{x-2}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-x-12}\cdot\frac{x-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-4)}\cdot(x+3)}\cdot\frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-2)}}=\frac{(x+1)}{(x+3)}$$ olur.



Örnek 27

$\frac{x^2-7x+10}{x^2-x-2} : \frac{x-5}{x+1}$ rasyonel ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



Çözüm

$\frac{x^2-7x+10}{x^2-x-2} : \frac{x-5}{x+1} = \frac{\cancel{(x-5)}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-5)}} = 1$ olur.



Örnek 28



Hayırsever iş adamı Kemal Bey, yıllık kazancının x^2 Türk lirasını ihtiyacı olan üniversite öğrencilerine burs vermek için ayırıyor. Bu parayı aşağıdaki koşullara uygun olarak dağıtıyor.

- Öncelikle 1600 Türk lirasını komşusunun kızı Polen'e veriyor.
- Kalan parasını ise ($x>40$ olmak üzere) $x-40$ kişiye eşit olarak dağıtıyor.

Buna göre Polen dışındaki öğrencilerin kaçar Türk lirası burs aldığını bulunuz.



Çözüm

Kemal Bey, x^2 Türk lirasının 1600 Türk lirasını Polen'e verdiğinden geriye x^2-1600 Türk lirası kalır.

Kalan parasını $x-40$ öğrenciye eşit olarak dağıttığında bu öğrencilerden her biri,

$\frac{x^2-1600}{x-40} = \frac{x^2-40^2}{x-40} = \frac{\cancel{(x-40)}\cdot(x+40)}{\cancel{(x-40)}} = x+40$ Türk lirası alır.



ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} : \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

2. $\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

3. $\frac{x-2\cdot(x+1)}{x^2-4}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

4. $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

5. a ve b birer gerçek sayıdır. $\frac{x^2-x+a}{x^2+2x+b}$ ifadesinin en sade şekli $\frac{x+1}{x+4}$ olduğuna göre $a\cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. $\frac{x^2+1}{x+1} : \frac{x^4-1}{x-1}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0$ polinomunda,

a) $a_n \cdot x^n$, $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, ..., $a_2 \cdot x^2$, $a_1 \cdot x^1$, a_0 ifadelerine polinomun .... denir.

b) a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 gerçek sayılarına polinomun .... denir.

c) x değişkeninin aldığı en büyük üsse polinomun .... denir ve der[P(x)] ile gösterilir.

ç) En büyük dereceli terimin katsayısına polinomun .... denir.

d) a_0 ifadesine polinomun .... denir.

B) Aşağıdaki numaralarla verilen polinomlar ile harflerle verilen bu polinomlara ait dereceleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

2.

1. $P(x) = 5x^2 + 4x - 3$
2. $Q(x) = 4 - x$
3. $R(x) = 5x^3 + 3x^4 + 6$

a) 1
b) 2
c) 3
ç) 4
d) 5

1.	2.	3.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını ilgili boşluklara yazınız.

3. $P(x) = ax^3 - 2x^2 + 6$ ve $Q(x) = x^2 + 2ax + 12$ polinomları veriliyor. $x \cdot P(x) + 2 \cdot Q(x+1)$ polinomunun katsayıları toplamı 72 olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

4. $P(x)$ sabit terimi 0 olmayan 2. dereceden bir polinomdur. $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamının sabit terimden farkı 0 olduğuna göre $\frac{P(1)}{P(0)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2$ ve $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ polinomları veriliyor. $P^2(x) \cdot Q(x)$ çarpımından elde edilecek x^7 li terimin katsayısını bulunuz.

6. $P(x)$ bir polinomdur.
$P(x^2) = x^6 + (a-4)x^5 + 3x^4 - (b-6)x^3 + a \cdot b$
olduğuna göre $P(x)$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

7. a gerçek sayı olmak üzere
$P(x)=ax^3+ax^2+4x+a$ polinomunun
$Q(x)=x^2+1$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan polinomlarının toplamını bulunuz.

8. $P(x)$ bir polinom, a ve b gerçek sayıdır.
$$(x^2-4)\cdot P(x)=\frac{3x^3}{8}-ax^2+bx-16$$
olduğuna göre $a-b$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. a gerçek sayı olmak üzere
$P(2x-2)=-6\cdot ax+14$ polinomu veriliyor.
Buna göre $P(x^2+3x+6)$ polinomunun 2x ile bölümünden kalan -12 ise a ifadesinin değerini bulunuz.

10. 2. dereceden bir $P(x)$ polinomunun sıfırları -2 ve 6 dır. $P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan -32 olduğuna göre $P(x+5)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

11 - 13. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Bir telefon ve tablet bilgisayar uygulaması geliştirmek isteyen Taykut Bey, bu uygulamayı aşağıdaki kurallara göre oluşturuyor.

- VERİ sayısına 1 ekleyip karesini alıyor. Bu sonucu 2 ile çarpıp 1 numaralı işlem olarak adlandırıyor.
- VERİ sayısının 1 eksiğinin karesini alıyor. Bu sonucu 2 numaralı işlem olarak adlandırıyor.
- 2 numaralı işlemden 1 numaralı işlemin çıkarılmasından elde edilen sonucu ÜRÜN olarak adlandırıyor.

11. VERİ x olmak üzere x e bağlı ÜRÜN formülünü oluşturunuz.

12. VERİ 5 olduğunda ÜRÜN ün kaç olacağını bulunuz.

13. Uygulamada yanlışlıkla 1. işlemde VERİ nin 1 fazlası yerine 2 fazlasının karesi alınmıştır. Buna göre VERİ 5 olduğunda ÜRÜN ün olması gerektiğinden ne kadar az hesaplanacağını bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

14. Bir $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomu ile bölümünden elde edilen bölüm polinomu $B(x) = x^2 - 6x - 7$ ve kalan polinomu ise $K(x) = x^2 - 5x$ olarak veriliyor. Bu bilgilere göre $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 4 C) 0 D) −4 E) −6

15. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom, a gerçek sayı olmak üzere

$$P(2x-1) + (x-3) \cdot Q(x+4) = 2x^2 + 6x + a - 2$$

eşitliği veriliyor.

- $P(x)$ polinomunun $2x - 10$ ile bölümünden kalan 38 dir.
- $Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan 3 tür.

Verilen bu bilgilere göre $P(x)$ polinomunun $x + 5$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 8

16. $P(x)$ bir polinomdur. $der[P(x)] = 3$ olduğuna göre $der\left[(x^2+3) \cdot P^2(P(x^2+3))\right]$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 14 B) 18 C) 38 D) 40 E) 42

17. $P(x)$ 3. dereceden bir polinom olmak üzere $P(-2) = P(2) = P(4) = -24$ ve $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 21 olduğuna göre $P(x-1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 51 B) 50 C) 48 D) 44 E) 40

18. $P(x) = -x^2 + 3x - 1$ polinomu veriliyor. $P^3[P(x-1)]$ polinomunun $2x - 6$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −27 B) −8 C) 1 D) 8 E) 27

19. $P(x) = (x+1)^4 \cdot (x-1)^2$ olarak veriliyor. $P(x)$ polinomunun x^3 lü teriminin katsayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −8 B) −4 C) 4 D) 8 E) 12

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıda numaralarla verilen polinomlar ile harflerle verilen polinomların eşit olanlarını eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

1. 1. $P(x) = x^2 - 1$

2. $Q(x) = x^2 - 4x + 4$

3. $T(x) = 4x^2 + 16x + 16$

a) $(x-1)\cdot(x-1)$

b) $(x-1)\cdot(x+1)$

c) $(x-4)\cdot(x+1)$

ç) $(x-2)\cdot(x-2)$

d) $4(x+2)\cdot(x+2)$

1.	2.	3.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını ilgili boşluklara yazınız.

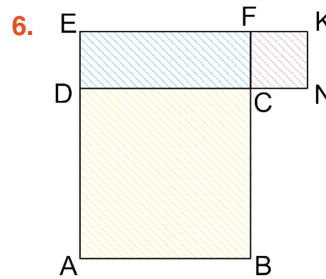
2. $(5001)^2 - (4999)^2$ ifadesinin kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

3. $\dfrac{9-x^2}{2x^2+6x} : \left(1-\dfrac{x}{3}\right)$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

4. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} \cdot \dfrac{x+1}{x^2-1}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

5. a ve b gerçek sayılar olmak üzere $\dfrac{x^2-ax-6}{x^2-bx-4}$ ifadesinin en sade hâli $\dfrac{x-3}{x-2}$ olduğuna göre $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

6.



ABCD ve FKNC birer karedir. Şeklin tüm alanı 39 cm^2 ve ABCNKE çokgeninin çevresi 28 cm olduğuna göre EDCF dikdörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

7. $x > 2$ olmak üzere bir aracın $x-2$ saatte aldığı yol $x^3+4x-2x^2-8$ olduğuna göre bu aracın bu süre içerisindeki ortalama hızı aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2 B) x^2+4 C) x^2+4x D) x^2-4x E) x

8. Seda Öğretmen'in tahtaya kaldırdığı öğrencisi, tahtaya çarpanlara ayırma ile ilgili aşağıdaki adımları yazarak bir çalışma yapıyor.

a, b sıfırdan farklı iki gerçek sayı ve $a=b$ olmak üzere

I. $a^2 = a \cdot b$ (Her iki taraf a ile çarpılır.)
II. $a^2-b^2 = a \cdot b - b^2$ (Eşitliğin her iki tarafından b^2 çıkarılır.)
III. $(a-b)\cdot(a+b) = b(a-b)$ (Eşitliğin her iki tarafı çarpanlarına ayırılır.)
IV. $a+b=b$ (Eşitliğin her iki tarafı $a-b$ ile bölünür.)
V. $a=0$ (Eşitliğin her iki tarafından b çıkarılır.)

Bu çalışmada hangi adımda hata yapılmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V

9. 9^6-1 sayısı aşağıdakilerden hangisine tam olarak bölünemez?

A) 13 B) 26 C) 51 D) 56 E) 73

10. Hakan Bey, iki veya daha fazla sabit polinomdan farklı polinomların çarpımı şeklinde yazılabilen cebirsel ifadeleri **cömert ifadeler** olarak adlandırmak istiyor. Örneğin $6x^2+x-2=(2x-1)\cdot(3x+2)$ olduğundan $6x^2+x-2$ ifadesi bir cömert ifadedir.

Buna göre

I. $x \geq 0$ olmak üzere x^2+x+1
II. $(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)+5$
III. x^3+x^2+x+1

ifadelerinden hangileri cömert ifadelerdir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) II ve III E) I, II ve III

11. Aşağıda cebirsel ifadelere ait en sade durumlar verilmiştir.

I. $\dfrac{(x-2)\cdot(1-x)}{x^2-1} = \dfrac{2-x}{x+1}$

II. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{-2}{x+1}$

III. $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} : \dfrac{x^3-1}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{x+1}$

Yukarıdaki eşitliklerden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



SAYILAR VE CEBİR

4

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$i = \sqrt{-1}$

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

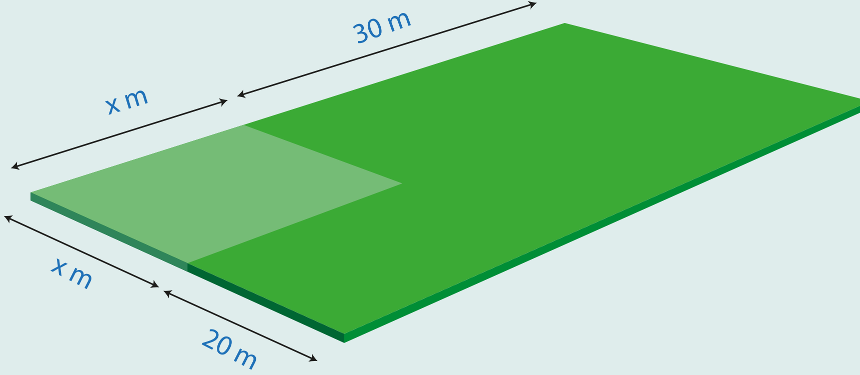
10.4.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER



Hazırlık Çalışması

1.



Bir hayırsever olan Ali Bey, şehit olan oğlu Akif adına bir okul yapılması için kenar uzunlukları $(x+30)$ metre ve $(x+20)$ metre olan dikdörtgen şeklindeki arazisinin bir kenar uzunluğu x metre olan kare şeklindeki kısmını bağışlıyor. Geriye kalan arazisinin alanı 3100 metrekare olduğuna göre bağışlanan alanının kaç metrekare olduğunu bulunuz.

2. Bilgi: Bir denklemin kökü o denklemde değişken yerine yazıldığında eşitliği sağlar.
Bu bilgiye göre aşağıda verilen denklemler ile karşılarında verilen köklerin doğru ya da yanlış olduklarını yanlarındaki kutulara işaretleyiniz.

Denklem	Kökler	Doğru	Yanlış
$2x+6=0$	3		
$(x+3)\cdot(x-2)=0$	-3 veya 2		
$x^2-9=0$	-3 veya 3		

3. Saygı ve dürüstlüklerinden dolayı okulun onur kuruluna seçilen kız ve erkek öğrencilerden oluşturulan 7 kişilik gruptaki kız öğrencilerin sayısı ile erkek öğrencilerin sayısının çarpımı 12 dir. Gruptaki kız öğrenci sayısı daha fazla olduğuna göre gruptaki erkek ve kız öğrencilerin sayılarını bulunuz.


Tarihi Varda Köprüsü



Tarih boyunca mesafeleri kısaltarak insanların ulaşımlarını kolaylaştırmak için köprüler yapılmıştır. Daha dayanaklı ve daha uzun ömürlü köprüler yapılabilmesi için ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerinden yararlanılmıştır. Buna güzel örneklerden biri yukarıdaki görselde verilen Tarihi Varda Köprüsü'dür.

İçinde bulunulan teknoloji çağında hem görsel hem işitsel iletişimi sağlayan ve böylece teknolojinin daha hızlı gelişmesine katkıda bulunan en önemli buluşlardan biri uydulardır. Uzayda, gelişmiş bir uyduya sahip olmak devletlerin güçlü olmalarındaki en önemli unsurlardandır.

Köprülerin dayanıklılıklarının artırılmasında ve uzaya fırlatılan uyduların yörüngelerinin hesaplanmasında önemli unsurlardan biri ikinci dereceden denklemlerin çözümüdür.

Bu bölümde pozitif bilimlerin karşılaştığı sorunların başında gelen ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümesinin bulunmasını inceleyeceksiniz.

10.4.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Terimler ve Kavramlar

- İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem
- Denklemin Kökü
- Kökler Toplamı, Kökler Çarpımı
- Diskriminant
- Karmaşık Sayı
- Eşlenik

Sembol ve Gösterimler

Δ, i, $a+ib$, z, $\overline{z}$, $\mathbb{C}$, $\text{İm}(z)$, $\text{Re}(z)$



Neler Öğreneceksiniz?

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramını açıklamayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmeyi,
- Bir karmaşık sayının $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a+ib$ biçiminde ifade edildiğini açıklamayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

10.4.1.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem Kavramı

Geçmişten günümüze insanoğlu bilinmeyenlerin çözümü kunusunda pek çok girişimde bulunmuştur. Bilimin bugünkü seviyesine ulaşması geçmişteki bu sabırlı çalışmaların birikiminin sonucudur. Bu bölümde ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin tarihsel gelişim sürecine ve bu süreçte rol alan Brahmagupta, Harezmî ve Abdulhamid İbn Türk'ün çalışmalarına yer verilecektir.

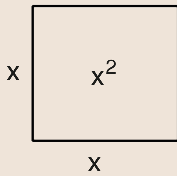


Bilim İnsanları

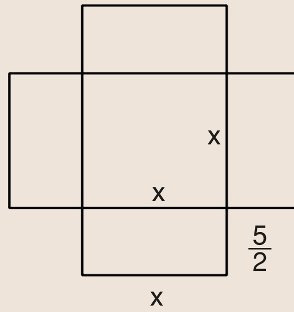
Harezmî (780-850)



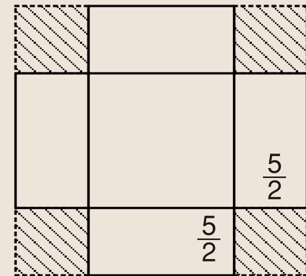
Matematik biliminin bugünkü seviyesine gelmesinde tarihsel süreçteki bilimsel çalışmaların önemli katkısı vardır. Bu katkıyı sağlayanlardan biri de ünlü İslam matematikçisi Harezmî'dir. Harezmî, El-Kitâbü'l-Muhtasar fi Hisâb el-gabr ve'l-mukâbele (Tamamlama ve Denkleştirme ile Hesaplamanın Özet Kitabı) adlı eserinde önce aritmetiksel sayı tanımını verir ve bu sayının konumlu ve on tabanlı sistemde nasıl ifade edildiğini kısaca açıklar. Cebir terimini ilk kullanan kişidir. Cebirsel sayı tanımından sonra kendisinin geliştirdiği cebir ve mukabele sisteminde bu sayının x, x^2 ve c şeklindeki üç türünü anlatır. Daha sonra bu üç cebirsel niceliğin birbiriyle olan ilişkisinden ortaya çıkan altı durumu ele alır. Bu altı ilişkiden üçü $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$ şeklinde basit; diğer üçü $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ şeklinde katışıktır. Harezmî önce bu denklemlerin analitik çözümlerini verir, daha sonra katışık denklemlerin geometrik ispatını yapar. $x^2 + 21 = 10x$ denkleminin iki farklı kökünü vermiştir. $x^2 - 2x - 5x - 6 = 0$ iyileştirme ile negatif terimleri diğer tarafa atmayı ifade ederek denklemi $x^2 = 5x + 2x + 6$ şekline dönüştürür. Sadeleştirme ile de benzer terimlerin birleştirilmesini ifade eder ve bu durumda son denklem $x^2 = 7x + 6$ şekline dönüşür. Harezmî özel olarak $x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözümünü geometrik olarak aşağıdaki gibi bulmuştur.



Alan $= x^2$



Alan $= x^2 + \left(\frac{5}{2} \cdot x\right) \cdot 4 = x^2 + 10x = 39$



Taralı alan $= \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) \cdot 4 = 25$

Tüm alan $=$ (Alan) $+$ (Taralı alan)

Tüm alan $= 39 + 25 = 64$

64, bir kenarı $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + x$ olan karenin alanıdır.

$8 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + x \Rightarrow x = 3$ olur.

Harezmî çarpma başlığı altında $a \pm x$, $b \pm x$ gibi cebirsel sayı ifadelerinin (binom) çarpımını, toplama ve çıkarma başlığı altında cebirsel sayıların toplama ve çıkarma işlemlerini gösterir. Bölme başlığı altında da kurallarını belirtir ve köklü ifadelerle ilgili olarak verdiği bu kuralların ispatını yapar. Daha sonra altı cebirsel denklem formülü ile verdiği sırayı takip ederek analitik çerçeve içinde örnekler çözer, sonra yeni bir başlık altında karışık örneklerle çözümlerini verir. Ayrıca eserde dört orantılı sayı yöntemini ele alır ve bu yöntemle çözülebilen problemlerden söz ederek örneklerini sıralar. Pratik geometri kısmında ise bazı geometrik şekillerin alan hesaplarının formüllerini örneklerle anlatır. Bu kısmın en dikkat çekici tarafı iki geometri probleminin cebir yöntemiyle çözülmesidir. Bu tavır, matematik tarihinde cebrin geometrik problemlere uygulanışını açıkça gösteren ilk teşebbüstür. Bu aynı zamanda cebir-geometri ilişkisine (analitik geometri) giden yolda basit de olsa atılan ilk adımdır. Harezmî, eserinin son bölümünde ilk defa cebri, İslâm fıkhının (hukuku) ferâiz (farzlar; mirasta pay) meselesine uygular. Bu çerçevede değişik başlıklar altında çeşitli vasiyet problemlerini cebir ve mukabele yöntemiyle çözer. Harezmî'nin geliştirdiği cebir her şeyden önce ikinci derece denklemlerle sınırlı bir cebirdir. Bunun yanında negatif sayılar hiç kullanılmamış, dolayısıyla denklemlerin tespitinde pozitif kökleri bulmakla yetinilmiştir. Ayrıca eserde sayılar dâhil hiçbir aritmetiksel ve cebirsel işlem için sembol kullanılmamış ve bütün işlemler sözel olarak ifade edilmiştir. Harezmî, Mezopotamya-Grek geleneğinin aritmetiksel niceliğiyle Mısır-Grek geleneğinin geometrik niceliği yanında cebirsel niceliği açık şekilde ilk ortaya koyan ve cebirsel denklemleri çözerken analitik çözüm yanında geometrik çizimi de kullanan ilk matematikçidir. Aritmetik ile ilgili eserlerinin orijinali kayıp olsa da 1857'de bulunan Latince çevirisinde esere "konumuz algoritma" diye başlar. Buradaki "algoritma" kelimesi matematik terimi olup Harezmî'nin (El-Harezmî) adından gelmektedir. Burada Hint aritmetiğine uyguladığı yöntemin benzerini, cebirsel denklemleri çözerken cebre de uygulamıştır **(Fazlıoğlu, 1997, s. 226-227; Cajori, 2015, s. 116, 124, 128, 143, 144).**

Düzenlenmiştir.



Bilim İnsanları

Abdulhamid İbn Türk



Cebrin kurucularından olduğu kabul edilen İslam matematikçisidir. Doğum tarihi belli değildir. Doğduğu veya yaşadığı şehir de kesinlikle bilinmemekte, bu yerin Hazar denizinin güneyindeki Gîlân yahut Çin Türkistanı'nın batısındaki Huttal olduğu sanılmaktadır. Biri Kitâbü'l-Câmi fi'l-Hisâb, diğeri Kitâbü'l-Muâmelât adını taşıyan iki kitabının bulunduğu kayıtlıdır. Bazı kaynaklarda hesap ilminde çok bilgili ve maharet sahibi olduğu, bu ilmin mensuplarının daima ondan bahsettikleri söylenmektedir. Bu iki eserinden başka Kitâbü Nevâdiri'l-Hisâb ve Havâssü'l-Adâd adlı iki kitabının daha varlığı bildirilmektedir. Ancak bu iki adın bir tek esere ait olması da mümkündür. Harezmî ile aynı dönemde yaşamıştır. Bu nedenle cebrin kurucusunun Harezmî mi Abdulhamid ibn Türk mü olduğu konusu tartışmalıdır. Üç tip ikinci derece denklemini sistemli bir yaklaşımla ve geniş açıklamalar yaparak ayrıntılı biçimde çözmektedir. Çözüm için seçtiği metot geometrik yoldur ve Mezopotamya geleneğini devam ettirmekte, formül kullanmadan sözlü anlatımla sonuca varmaktadır. Denklemleri incelemesi, kendinden önce gelenlerden biraz farklı ve sonrakilere yol gösterecek şekildedir. **(Aydın, 1988, s. 225).**

Düzenlenmiştir.



Bilim İnsanları

Brahmagupta (Bırahmagupta) (598-670)



7. yüzyılda yaşamış Hintli matematik ve astronomi bilginidir. Döneminde Hindistan'ın önde gelen matematik merkezlerinden biri olan Ujjain'deki (Uycen) gözlemevinin başına geçti. Bu gözlemevi önemli bir matematik astronomi okulu hâline geldi. En önemli eseri Brahmasphutasiddhanta'dır (Bırahmasfutissidanta) (Brahma Sisteminin Düzeltilmiş Hâli) ve 628 yılında yazmıştır. 25 bölümden oluşan bu eserin 12. ve 18. bölümleri matematik ile ilgilidir. Brahmagupta, eserinde sayı sistemlerini, döneminin diğer matematikçilerinden farklı bir anlayışla ele almıştır. Aynı iki sayının birbirinden çıkarılmasının sonucunun "sıfır" olduğunu tanımlamış, aynı zamanda "sıfır" ile ilgili bazı özellikleri de belirlemiştir. Buna göre bir sayıya "sıfır" eklendiğinde veya bir sayıdan "sıfır" çıkarıldığında sayı değişmeden kalır ve "sıfır" ile çarpılan bir sayı "sıfır" olur. Brahmagupta daha sonra "sıfır"a bölmeyi de içerecek şekilde aritmetiği genişletmeye çalışmıştır. Ayrıca pozitif sayılar ve negatif sayılar açısından bazı aritmetik kurallar da vermiştir. Brahmagupta'nın bu eserde sunduğu bir başka aritmetik sonuç, karekök hesaplama algoritmasıdır. Ayrıca ilk n doğal sayısının karelerinin ve küplerinin toplamı olan aşağıdaki formülleri bulmuştur.

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \text{ ve } 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$$

Bazı cebirsel gösterimi geliştirmiş ve ikinci dereceden denklemleri çözmek için yöntemler sunmuştur. Ayrıca belirsiz denklemlerin çözümü konusunda da yöntemler ortaya koymuştur.

- $ax+c=by$ formundaki denklemlerin bilinmeyenleri x, y nin bulunması için çözüm metodu sunmuştur.
- $ax^2+c=y^2$ ve $ax^2-c=y^2$ formundaki ikinci derece denklemlerinin bilinmeyenleri olan x ve y nin bulunması yöntemini vermiştir.

Örneğin $8x^2+1=y^2$ denkleminin çözümlerinin
$(x, y)=\{(1, 3), (6, 17), (35, 99), (204, 577), (1189, 3363), ...\}$ olduğunu buldu.

Brahmagupta, Brahmasphutasiddhanta'da dikdörtgenlerin alanıyla ilgili görüşlerine de yer vermiştir. Brahmagupta'nın ikinci eseri ise Khandakhadyaka (Kinkik) adını taşır. Bu kitabı 665 yılında yazmıştır. Sekiz bölümden oluşan bu eseri ilk eserinin bir tekrarı niteliğindedir. Brahmagupta, bu ikinci eserinde matematikle ilgili olarak sinüs değerlerini hesaplamak için interpolasyon (tahmin yoluyla çözme) formülünü vermiştir. Ayrıca bir yılın 365 gün, 6 saat, 5 dakika, 19 saniye olduğunu da hesapladı **(Cajori, 2015, s. 90, 105-108, 113-115, 119, 121; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html).**

Düzenlenmiştir.

10.4.1.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü



Bilgi

- $a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem**; a,b,c gerçek sayılarına ise bu **denklemin katsayıları** denir.

- Denklemi sağlayan x sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluşturduğu kümeye ise **denklemin çözüm kümesi** denir.



Örnek 1

Aşağıda verilen denklemlerden hangisi ya da hangilerinin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirttiğini bulunuz.

a) $3x^3 + x^2 + 4 = 0$ **b)** $-5x + 3 - \frac{1}{5}x^2 = 0$



Çözüm

a) $3x^3 + x^2 + 4 = 0$ denkleminde $3x^3$ terimi olduğu için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez. Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

b) $-5x + 3 - \frac{1}{5}x^2 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $-\frac{1}{5}x^2$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.



Örnek 2

$(a-1)x^3 + x^{2b-4} + (a+b)x + a \cdot b = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.



Çözüm

$(a-1)x^3 + x^{2b-4} + (a+b)x + a \cdot b = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğundan x^3 lü terimin katsayısı sıfır, x^{2b-4} lü terimin üssünün 2 olması gerekir. Dolayısıyla
$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ ve $2b - 4 = 2 \Rightarrow b = 3$ olur.



Örnek 3

Hale kardeşi Duru'dan 5 yaş küçüktür. Bu iki kardeşin yaşları çarpımı 24 olduğuna göre Duru'nun bugünkü yaşını veren bir denklem yazınız.



Çözüm

Duru'nun bugünkü yaşına x denilirse Hale'nin yaşı x cinsinden $x - 5$ olur.
Yaşları çarpımı ise 24 olduğundan istenilen denklem,

$$x \cdot (x-5) = 24$$
$$x^2 - 5x = 24$$
$$x^2 - 5x - 24 = 0 \text{ olur.}$$



Örnek 4

x^2+4x-5 ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırınız.



Çözüm

x^2+4x-5 ifadesine, içerisinde $(x+2)^2$ ni bulunduracak biçimde düzenlemek amacıyla 4 eklenir ve çıkarılırsa $\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}-4-5=(x+2)^2-9$ olur. İki kare farkı şeklinde olan bu ifade çarpanlarına ayrılırsa

$(x+2)^2-3^2=(x+2+3)\cdot(x+2-3)=(x+5)\cdot(x-1)$ olur.



İpucu

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=x^2+bx+\frac{b^2}{4}$ olduğundan x^2+bx+c ifadesinde $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ ni elde etmek için bu ifadeye $\frac{b^2}{4}$ terimi eklenip çıkarılır.



Örnek 5

x^2-6x-3 ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırınız.



Çözüm

x^2-6x-3 ifadesine 9 eklenir ve çıkarılırsa $\left(\left(-\frac{6}{2}\right)^2=9\right)$

$\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9-3=(x-3)^2-12=(x-3)^2-(2\sqrt{3})^2=(x-3+2\sqrt{3})\cdot(x-3-2\sqrt{3})$ olur.



Örnek 6

$2x^2-10x+9$ ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırınız.



Çözüm

$2x^2-10x+9$ ifadesi 2 parantezine alınarak $2\cdot\left(x^2-5x+\frac{9}{2}\right)$ elde edilir. Bu ifadede parantez içerisine $\frac{25}{4}$ sayısı eklenir ve çıkarılırsa $\left(\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\right)$

$$2\cdot\left(\underbrace{x^2-5x+\frac{25}{4}}_{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}\underbrace{-\frac{25}{4}}_{(1)}\underbrace{+\frac{9}{2}}_{(2)}\right)=2\cdot\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right]$$

$$=2\cdot\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\cdot\left(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$=2\cdot\left(x+\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{7}+5}{2}\right) \text{ olur.}$$



Bilgi

$a \neq 0$, a, b, c,p, $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ üç terimlisi çarpanlarına ayrılıyorsa çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

$a x^2 + bx + c = 0$ ifadesinde $px \cdot qx = ax^2$, $m \cdot n = c$ ve $p \cdot n \cdot x + q \cdot m \cdot x = bx$ ise

$$\begin{array}{ccc} px & & m \\ & \times & \\ qx & & n \end{array}$$

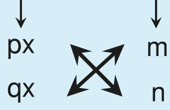
$ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (qx + n) = 0$ olur. Bu iki çarpanın çarpımları 0 olduğuna göre

$px + m = 0$ veya $qx + n = 0$

$p \cdot x = -m$ $\quad$ $q \cdot x = -n$

$x = -\frac{m}{p}$ $\quad$ $x = -\frac{n}{q}$ olur.

Bulunan x değerlerine $ax^2 + bx + c = 0$ **denkleminin kökleri** denir. Bu kökler x_1 ve x_2 ile gösterilebilir (Bulunan köklerden herhangi birine $x_1 = -\frac{m}{p}$, diğerine ise $x_2 = -\frac{n}{q}$ denilebilir.). Denklemin çözüm kümesi $ÇK = \left\{-\frac{m}{p}, -\frac{n}{q}\right\}$ şeklinde gösterilir.





Örnek 7

$x^2 - 2x - 15 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

1. yol

$x^2 - 2x - 15$ üç terimlisi $(x - 5) \cdot (x + 3)$ olarak çarpanlarına ayrılırsa $(x - 5) \cdot (x + 3) = 0$ olur.

$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & +3 \end{array}$$

Buradan $x - 5 = 0$ ise $x_1 = 5$ veya $x + 3 = 0$ ise $x_2 = -3$ bulunur. Dolayısıyla $ÇK = \{-3, 5\}$ olur.

2. yol

$x^2 - 2x - 15 = 0$ denkleminde eşitliğin sol tarafına 1 eklenir ve çıkarılırsa

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 - 15 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 16 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 4^2 = 0$$

$$(x - 1 + 4) \cdot (x - 1 - 4) = 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 5) = 0 \text{ olur.}$$

Buradan $x + 3 = 0$ ise $x_1 = -3$ veya $x - 5 = 0$ ise $x_2 = 5$ bulunur. Dolayısıyla $ÇK = \{-3, 5\}$ olarak yazılır.



Örnek 8

$2x^2+3x-20=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

1. yol

$2x^2+3x-20=0$ ise $(2x-5)\cdot(x+4)=0$ olur.

$$\begin{array}{ccc} 2x & \times & -5 \\ x & & 4 \\ \hline & 8x-5x=3x & \end{array}$$

Buradan $2x-5=0$ ise $x_1=\frac{5}{2}$ veya $x+4=0$ ise $x_2=-4$ olur. Dolayısıyla $ÇK=\left\{-4, \frac{5}{2}\right\}$ olarak yazılır.

2. yol

$2x^2+3x-20=0$ denkleminde $2x^2+3x-20$ üç terimlisi 2 parantezine alınırsa denklem $2\cdot\left(x^2+\frac{3x}{2}-10\right)=0$ olur. Parantezin içine $\frac{9}{16}$ eklenir ve çıkarılırsa

$$2\cdot\left(x^2+\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}-10\right)=0$$
$$2\cdot\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{169}{16}\right)=0$$
$$2\cdot\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{13}{4}\right)^2\right)=0$$
$$2\cdot\left(x+\frac{3}{4}+\frac{13}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\right)=0$$
$$2\cdot\left(x+\frac{16}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{10}{4}\right)=0$$
$$2\cdot(x+4)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=0 \text{ olur.}$$

Buradan $x+4=0$ ise $x_1=-4$ veya $x-\frac{5}{2}=0$ ise $x_2=\frac{5}{2}$ bulunur.

Dolayısıyla $2x^2+3x-20=0$ denkleminin $ÇK=\left\{-4, \frac{5}{2}\right\}$ olur.



Örnek 9

$x^2+2x+6=0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

x^2+2x+6 ifadesi kolaylıkla çarpanlara ayrılamadığından 1 eklenip ve çıkarılarak içinde tam kare ifade bulunduracak duruma getirilirse

$$\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}-1+6=0$$
$$(x+1)^2+5=0$$
$$(x+1)^2=-5 \text{ olur.}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(x+1)^2\geq 0$ olması gerektiğinden $(x+1)^2=-5$ denklemini sağlayan gerçek kökler bulunamaz. Dolayısıyla $x^2+2x+6=0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi $ÇK=\varnothing$ dir.



İpucu

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $c = 0$ için denklem $ax^2 + bx = 0$ biçiminde yazılır ve ortak çarpan parantezine alma yöntemi kullanılarak çözüm kümesi bulunabilir.



Örnek 10

$x^2 - 6x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$x^2 - 6x = 0$ ise $x \cdot (x - 6) = 0$ olur. Buradan $x_1 = 0$ veya $x - 6 = 0$ için $x_2 = 6$ olur.
Dolayısıyla $ÇK = \{0, 6\}$ olur.



Örnek 11

$2x^2 = 7x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$2x^2 = 7x$ ise $2x^2 - 7x = 0$ olur. Buradan $x \cdot (2x - 7) = 0$, $x_1 = 0$ veya $2x - 7 = 0$ için $x_2 = \frac{7}{2}$ olur. Dolayısıyla $ÇK = \left\{0, \frac{7}{2}\right\}$ olur.



İpucu

$a \neq 0$ ve a, b, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b = 0$ ise bu denklem $ax^2 + c = 0$ olur. Buradan $ax^2 = -c$ ve $x^2 = -\frac{c}{a}$ bulunur.

- $-\frac{c}{a} > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ veya $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ olur.
- $-\frac{c}{a} < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur. Dolayısıyla $ÇK = \varnothing$ olur.



Örnek 12

$2x^2 - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$2x^2 - 8 = 0$ ise $2x^2 = 8$ ve $x^2 = 4$ olur. Buradan $x_1 = 2$ veya $x_2 = -2$ bulunur.
Dolayısıyla $ÇK = \{-2, 2\}$ olur.



Örnek 13

$x^2 - 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$x^2 - 12 = 0$ ise $x^2 = 12$ olur. Buradan $x_1 = \sqrt{12}$ veya $x_2 = -\sqrt{12}$ olur.
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ve $-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ olarak yazılırsa $ÇK = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$ bulunur.



Örnek 14

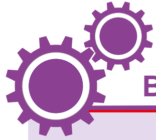
$-2x^2 - 18 = 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$-2x^2 - 18 = 0$ ise $-2x^2 = 18$ veya $x^2 = -9$ olur. Herhangi bir gerçek sayının karesi bir negatif sayı olamayacağından verilen denklemin $ÇK = \varnothing$ olur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Köklerini Veren Formül ve Diskriminant Kavramı



Buluyorum

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ise $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0$ olur.
Parantezin içindeki ifadeyi tamkare yapmak için ifadeye $\frac{b^2}{4a^2}$ eklenir ve çıkarılırsa

$$a \cdot \Big(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \underset{(4a)}{\frac{c}{a}}\Big) = 0$$

$$a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \text{ olur.}$$

Buradan $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ veya $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ yazılır. Bu iki eşitlikte $4a^2 > 0$ olacağından $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ veya $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olarak bulunur. Böylece $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ veya $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olur. Bu durum $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ olarak ifade edilebilir.



İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerini veren bağıntıda $b^2 - 4ac$ ifadesine **denklemin diskriminantı** denir ve $\triangle$ (delta) ile gösterilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

- $\triangle = b^2 - 4ac > 0$ ise bu denklemin iki farklı gerçek kökü vardır ve bu kökler,
  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$ olur.
- $\triangle = b^2 - 4ac = 0$ ise bu denklemin kökleri birbirine eşittir (çakışık iki kök). Bu kökler,
  $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ olarak ifade edilir.
- $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ ise bu denklemin gerçek kökleri yoktur. Denklemin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi boş kümedir. $ÇK = \varnothing$ olur.



Örnek 15

$x^2 + 5x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$x^2 + 5x - 6 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 1$, $b = 5$ ve $c = -6$ dır. Önce diskriminant ($\triangle$) hesaplanarak köklerin varlığı araştırılır.

$\triangle = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$= 25 + 24$

$= 49$ olur.

$\triangle > 0$ olduğundan $x^2 + 5x - 6 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır ve bu kökler;

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 + 7}{2} = 1,$

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 - 7}{2} = -6$ olarak bulunur.

Buradan $ÇK = \{-6, 1\}$ olur.



Örnek 16

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 9$, $b = -6$ ve $c = 1$ olur.

$\triangle = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$ olduğundan $x_1 = x_2$ olur (Kökler çakışıktır.). Buradan

$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 9} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ olup denklemin $ÇK = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ olarak bulunur.



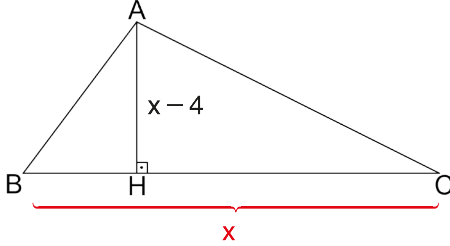
Örnek 17

Bir ABC üçgeninde A köşesinden BC kenarına çizilen yükseklik BC kenar uzunluğundan 4 cm daha kısadır. ABC üçgeninin alanı 3 cm^2 olduğuna göre $|BC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.



Çözüm

$|BC| = x$ cm olsun. Bu durumda $h_a = (x-4)$ cm olur. Bu bilgiler yardımıyla bir $\widehat{ABC}$ aşağıdaki gibi çizilebilir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{x \cdot (x-4)}{2} = 3 \text{ ise}$$

$x^2 - 4x = 6$ ve $x^2 - 4x - 6 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemin katsayıları; $a = 1$, $b = -4$ ve $c = -6$ olur.

$\triangle = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 16 + 24 = 40$ olup $\triangle > 0$ olduğundan denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{40}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{2} = \frac{2 \cdot (2 + \sqrt{10})}{2} = 2 + \sqrt{10},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{40}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{2} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{10})}{2} = 2 - \sqrt{10}$$ olarak bulunur.

x değeri uzunluk belirttiğinden negatif bir sayı değeri olamaz. Dolayısıyla $|BC| = x = 2 + \sqrt{10}$ cm olur.



Örnek 18

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

a) $2x^2 + 3x + 3 = 0$ **b)** $x^2 - 12x + 36 = 0$



Çözüm

a) $2x^2 + 3x + 3 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 2$, $b = 3$ ve $c = 3$ olur.

$\triangle = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 9 - 24 = -15$ bulunur.

$\triangle < 0$ olduğundan $2x^2 + 3x + 3 = 0$ denkleminin gerçek sayı kökleri yoktur.

Dolayısıyla $ÇK = \varnothing$ olur.

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 1$, $b = -12$ ve $c = 36$ olur.

$\triangle = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$ bulunur.

$\triangle = 0$ olduğundan $x^2 - 12x + 36 = 0$ denkleminin eşit iki kökü vardır.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2} = 6 \text{ olur.}$$



Örnek 19

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-x^2+4x=m-2$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre m nin değer aralığını bulunuz.



Çözüm

$-x^2+4x=m-2$ denklemi $-x^2+4x-m+2=0$ olarak düzenlenirse katsayıları,
$a=-1$, $b=4$ ve $c=-m+2$ olur. İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin farklı iki gerçek sayı kökü varsa $\Delta>0$ olmalıdır.

Buradan $\Delta=b^2-4ac>0$ ise $(4)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m+2)>0$

$$16-4m+8>0$$

$$\frac{24}{4}>\frac{4m}{4}$$

$$6>m \text{ olur.}$$

Dolayısıyla m nin değer aralığı $(-\infty,6)$ olarak bulunur.



Örnek 20



Yürüme engeli olan Fatih, Fethiye'de düzenlenen bir doğa yürüyüşüne tekerlekli sandalyesiyle katılmıştır.

- Doğa yürüyüşü 2 parkurdan oluşmaktadır. 1. parkur 9 km, 2. parkur ise 10 km uzunluğundadır.
- Fatih, iki parkuru toplam 5 saatte tamamlamıştır.
- Fatih'in 2. parkuru geçme hızı, 1. parkuru geçme hızından 2 km/sa daha fazladır.

Verilen bu bilgilere göre

a) Fatih'in 1. parkurdaki ortalama hızının kaç km/sa olduğunu bulunuz.

b) Fatih'in bu iki parkur boyunca ortalama hızının kaç km/sa olduğunu bulunuz.



Çözüm

a) Fatih'in 1. parkurdaki ortalama hızı x km/sa olsun. Bu durumda 2. parkurdaki ortalama hızı $(x+2)$ kaç km/sa olur. Fatih'in 1. parkuru ve 2. parkuru geçerken kullandığı toplam süre zaman $=\frac{\text{yol}}{\text{hız}}$ formülü yardımıyla yazılır ve toplanırsa $\frac{9}{x}+\frac{10}{x+2}=5$ denklemi elde edilir. Buradan

$$\underset{(x+2)}{\frac{9}{x}}+\underset{(x)}{\frac{10}{x+2}}=5$$

$$\frac{9x+18}{x^2+2x}+\frac{10x}{x^2+2x}=5$$

$$\frac{19x+18}{x^2+2x}=5$$

$$5x^2+10x=19x+18$$

$5x^2-9x-18=0$ denklemi elde edilir.

$5x^2-9x-18=0$ ise $(5x+6)\cdot(x-3)=0$ dır. Buradan $5x+6=0$ ise $x_1=-\frac{6}{5}$ veya $x-3=0$ ise $x_2=3$ olur.

$$\begin{matrix} 5x & 6 \\ x & -3 \end{matrix}$$

Fatih'in hızı negatif olamayacağından 1. parkurdaki ortalama hızı 3 km/sa olur.

b) $V_{ort}=\frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam süre}}$ formülü yardımıyla Fatih'in iki parkur boyunca ortalama hızı

$\frac{9+10}{5}=\frac{19}{5}=3,8$ km/sa olur.



Örnek 21

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 = -mx + 3x - m$ denkleminin çakışık iki kökü olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.



Çözüm

$x^2 = -mx + 3x - m$ denklemi $x^2 + mx - 3x + m = 0 \Rightarrow x^2 + (m-3)x + m = 0$ olarak düzenlenirse katsayıları; $a = 1$, $b = m - 3$ ve $c = m$ olur.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin çakışık iki kökü varsa $\triangle = 0$ olmalıdır.

Buradan $\triangle = b^2 - 4ac = 0$ ise

$$(m-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (m) = 0$$

$$m^2 - 6m + 9 - 4m = 0$$

$$m^2 - 10m + 9 = 0 \Rightarrow (m-9) \cdot (m-1) = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ m & -9 \\ m & -1 \end{array}$$

$(m-9) \cdot (m-1) = 0$ denkleminde $m - 9 = 0$ ise $m_1 = 9$ veya $m - 1 = 0$ ise $m_2 = 1$ olur.



Örnek 22



Güzelyalı Mahallesi sakinleri, sokak hayvanlarının içebilmesi için mahallelerinden geçen doğrusal bir yolun kaldırımına eş aralıklarla su kapları koymuştur. Art arda koyulan iki kap arası mesafe, toplam kap sayısına eşit ve baştaki ile sondaki kap arası uzaklık 110 metre olduğuna göre koyulan toplam kap sayısını bulunuz.



Çözüm

Koyulan toplam kap sayısına x denilirse art arda koyulan iki kap arası mesafe de x olur. Toplam kap sayısı x ise toplam aralık sayısı $x - 1$ dir. Buradan $x \cdot (x-1) = 110$ denklemi elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibi çözülürse

$$x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x-11) \cdot (x+10) = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ x & -11 \\ x & 10 \end{array}$$

Buradan $x - 11 = 0 \Rightarrow x_1 = 11$ veya $x + 10 = 0 \Rightarrow x_2 = -10$ olur.

Kap sayısı negatif olamayacağından toplam kap sayısı 11 dir.



Örnek 23



Matematik öğretmeni üç arkadaş Taner Bey, Gülsen Hanım ve Hüseyin Bey Ankara'da "Matematik Hatıra Ormanı" oluşturmaya karar veriyorlar ve temin ettikleri fidanları pazar günü dikiyorlar. Bu arkadaşlar günün sonunda dönüş yolunda arkadaşları Emrah Bey ile karşılaşıyorlar. Emrah Bey dikilen fidanlarla ilgili sorular soruyor ve aşağıdaki bilgileri elde ediyor.

- Taner Bey'in diktiği fidan sayısı, Hüseyin Bey'in diktiği fidan sayısının 2 katından 10 eksiktir.
- Gülsen Hanım'ın diktiği fidan sayısı, Taner Bey'in diktiği fidan sayısının yarısından 20 fazladır.
- Hüseyin Bey'in diktiği fidan sayısının 75 katı, Taner Bey ile Gülsen Hanım'ın diktikleri fidan sayılarının çarpımına eşittir.

Emrah Bey'in elde ettiği bilgilere göre

a) Toplam kaç fidan dikildiğini bulunuz.

b) Dikilen fidanlardan rastgele biri seçildiğinde, seçilen fidanın Gülsen Hanım'ın diktiği fidanlardan biri olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Hüseyin Bey'in diktiği fidan sayısı x olursa
Taner Bey'in diktiği fidan sayısı $2x-10$,
Gülsen Hanım'ın diktiği fidan sayısı $\frac{2x-10}{2}+20=x+15$ olur.

Hüseyin Bey'in diktiği fidan sayısının 75 katı, Taner Bey ile Gülsen Hanım'ın diktikleri fidan sayılarının çarpımına eşit olduğundan $75x=(2x-10)\cdot(x+15)$ olur. Bu denklem düzenlenirse $2x^2-55x-150=0$ olduğu görülür. $2x^2-55x-150=0 \Rightarrow (2x+5)\cdot(x-30)=0$ olur. Buradan $x_1=30$ veya $x_2=\frac{-5}{2}$ bulunur. Dikilen fidan sayısı negatif olamayacağından $x=30$ olur.

a) $x=30$ için
Hüseyin Bey'in diktiği fidan sayısı $x=30$,
Taner Bey'in diktiği fidan sayısı $2x-10=60-10=50$,
Gülsen Hanım'ın diktiği fidan sayısı $x+15=30+15=45$ olur.
Buradan dikilen toplam fidan sayısı $30+50+45=125$ bulunur.

b) Olasılık $=\dfrac{\text{İstenen olayın eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}}$ olmak üzere dikilen toplam fidan sayısı (örnek uzayın eleman sayısı) 125, Gülsen Hanım'ın diktiği fidan sayısı (istenen olayın eleman sayısı) 45 olduğundan seçilen fidanın Gülsen Hanım'ın dikdiği fidan olma olasılığı $\frac{45}{125}=\frac{9}{25}$ olur.



Örnek 24

$m \neq -4$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m+4)x^2+mx+3m-1=0$ denkleminin bir kökü -2 olduğuna göre diğer kökünü bulunuz.



Çözüm

-2 değeri $(m+4)x^2+mx+3m-1=0$ denkleminin bir kökü olduğundan denklemde x yerine -2 yazılırsa denklemi sağlar.

$$(m+4)\cdot(-2)^2+m\cdot(-2)+3m-1=0$$
$$4\cdot(m+4)-2m+3m-1=0$$
$$4m+16+m-1=0$$
$$5m+15=0$$
$$\frac{\not{5}m}{\not{5}}=\frac{-15}{5}$$
$$m=-3 \text{ olur.}$$

$(m+4)x^2+mx+3m-1=0$ denkleminde m yerine -3 yazılırsa

$(-3+4)x^2-3x+3\cdot(-3)-1=0$

$x^2-3x-10=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)\cdot(x+2)=0$ olur. Buradan $x-5=0 \Rightarrow x_1=5$ veya $x+2=0 \Rightarrow x_2=-2$ bulunur.

$\downarrow$ $\downarrow$
x -5
x 2

Buradan diğer kökün 5 olduğu görülür.



Örnek 25

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2-4x+2m-3=0$ ve $2x^2-6x+4m+2=0$ denklemlerinin birer kökü aynı olduğuna göre bu kökün kaç olduğunu bulunuz.



Çözüm

Her iki denklemin ortak kökü x olsun. $x^2-4x+2m-3=0$ ve $2x^2-6x+4m+2=0$ denklemlerinde bulunan x^2 li terimleri yok etmek için $x^2-4x+2m-3=0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı -2 ile çarpılırsa $-2x^2+8x-4m+6=0$ elde edilir. Bu denklem $2x^2-6x+4m+2=0$ denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$-\not{2x^2}+8x-4m+6=0$$
$$+\ \not{2x^2}-6x+4m+2=0$$
$$2x+8=0$$
$$2x=-8$$
$$x=-4 \text{ olur.}$$

Bulunan $x=-4$ değeri her iki denklemin ortak köküdür.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $2x^2 - 11x = 0$

c) $x^2 - 10x + 21 = 0$

ç) $-2x^2 + 11x - 15 = 0$

2. $x^2 - 2x - 6 = 0$ denkleminin köklerinden küçük olanı bulunuz.

3. $m \neq 3$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m-3)x^2 - 8x + 1 = 0$ denkleminin gerçek kökleri olmadığına göre m nin değer aralığını bulunuz.

4. $m \neq -3$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(m+3)x^2 - mx - 3x + m = 0$ denkleminin çakışık iki kökü olduğuna göre m değerini bulunuz.

5. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $x^2 - 4x + 2m = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü vardır.
- $x^2 + 6x + m + 11 = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur.

Yukarıda verilen bu bilgilere göre m nin kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

6. $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$

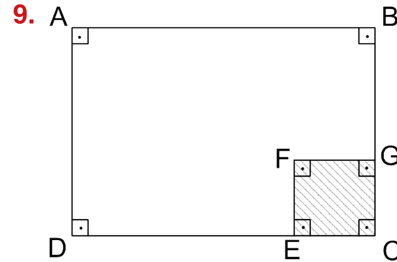
b) $x^2 - (a+b)x + a \cdot b = 0$

c) $ax^2 - (5a-3)x - 15 = 0$

7. $m > n > 0$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + (2m-n)x - 2mn = 0$ denkleminin büyük kökünü bulunuz.

8. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-3x^2 + (m-3)x + m + 12 = 0$ denkleminin bir kökü 2 olduğuna göre m ifadesinin değerini bulunuz.

9.



Yukarıda şekli verilen dikdörtgen biçimindeki bir kartondan kare biçimindeki FGCE karton parçası kesilerek atılıyor. $|AB| = 2 \cdot |AD| = 6 \cdot |GC|$ ve kalan şeklin alanı 68 santimetrekare olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

10. $m \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere $x^2 + 3x + m - 3 = 0$ ve $x^2 + (m+1)x - 1 = 0$ denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre m değerini bulunuz.

10.4.1.3. Bir Karmaşık Sayının $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ Biçiminde İfade Edilmesi



Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\Delta = b^2-4ac < 0$ ise bu denklemin $\mathbb{R}$ de (gerçek sayılarda) çözüm kümesi yoktur. Örneğin $x^2+9=0$ denkleminin çözüm kümesi, $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x_1=-\sqrt{-9}$ veya $x_2=\sqrt{-9}$ olur. $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi boş kümedir.

Bu denklemde $a=1$, $b=0$ ve $c=9$ olduğundan $\Delta = b^2-4ac = 0^2-4\cdot 1\cdot 9=-36<0$ olur. Bu durumda verilen denklemde $\Delta < 0$ ise bu denklemin gerçek sayılar kümesini de kapsayan yeni bir sayı kümesine ihtiyaç vardır. Bu yeni sayı kümesine **karmaşık sayılar kümesi** denir ve karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. $\sqrt{-9}$ sayısı karmaşık sayılar kümesinin bir elemanıdır.

$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\cdot\sqrt{-1}$ olur.
i sanal sayı birimi $(\sqrt{-1}=i)$ olmak üzere $\sqrt{-9}=3\cdot\sqrt{-1}=3i$ bulunur.
Buradan verilen denklemin çözüm kümesi, $x_1=-\sqrt{-9} \Rightarrow x_1=-3i$ veya $x_2=\sqrt{-9} \Rightarrow x_2=3i$ ve $ÇK=\{-3i, 3i\}$ olur.



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi $(i^2=-1)$ olmak üzere $z=a+bi$ şeklindeki sayılara **karmaşık sayılar**, bu sayıların oluşturduğu kümeye ise **karmaşık sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{C}$ sembolü ile gösterilir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}=\{z \mid z=a+bi \text{ ve } a, b \in \mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\}$ şeklindedir.

$z=a+bi$

- imajiner kısım (İm(z)) ← b
- gerçek kısım (Re(z)) ← a

a sayısına **z karmaşık sayısının gerçek kısmı** denir ve $\text{Re}(z)=a$ ile gösterilir.
b sayısına **z karmaşık sayısının imajiner (sanal) kısmı** denir ve $\text{İm}(z)=b$ ile gösterilir.
Her gerçek sayı aynı zamanda bir karmaşık sayıdır, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olur.



Örnek 26

Aşağıda verilen karmaşık sayıların gerçek ve sanal (imajiner) kısımlarını bulunuz.

a) $z_1=5+3i$ **b)** $z_2=-6-7i$ **c)** $z_3=3i$ **ç)** $z_4=8$



Çözüm

a) $z_1=5+3i \Rightarrow \text{Re}(z_1)=5$ ve $\text{İm}(z_1)=3$ olur.

b) $z_2=-6-7i \Rightarrow \text{Re}(z_2)=-6$ ve $\text{İm}(z_2)=-7$ olur.

c) $z_3=3i \Rightarrow \text{Re}(z_3)=0$ ve $\text{İm}(z_3)=3$ olur.

ç) $z_4=8 \Rightarrow \text{Re}(z_4)=8$ ve $\text{İm}(z_4)=0$ olur.



Örnek 27

$z = -5 + 2i$ ve $w = 2 + 7i$ karmaşık sayıları veriliyor. $Re(z) - 2 \cdot İm(w)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$z = -5 + 2i \Rightarrow Re(z) = -5$ ve $w = 2 + 7i \Rightarrow İm(w) = 7$ olarak bulunur. Bu değerler $Re(z) - 2 \cdot İm(w)$ ifadesinde yerine yazılırsa $Re(z) - 2 \cdot İm(w) = -5 - 2 \cdot 7 = -5 - 14 = -19$ olur.



Örnek 28

$Re(x - 5i) + İm(3 + (-4 + 2x)i) = 11$ olduğuna göre x gerçek sayısını bulunuz.



Çözüm

$Re(x - 5i) + İm(3 - 4i + 2xi) = 11$ eşitliği $Re(x - 5i) + İm(3 + (-4 + 2x)i) = 11$ şeklinde düzenlenirse
$Re(x - 5i) = x$ ve $İm(3 + (-4 + 2x)i) = -4 + 2x$ bulunur. Bu değerler $Re(x - 5i) + İm(3 - 4i + 2xi) = 11$ ifadesinde yerine yazılırsa $x - 4 + 2x = 11 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$ olur.



Örnek 29

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = a + b - i$ ve $z_2 = 5i + 3a - b$ karmaşık sayıları veriliyor.
$Re(z_1) = İm(z_2)$ ve $Re(z_2) = İm(z_1)$ olduğuna göre $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$z_1 = a + b - i \Rightarrow Re(z_1) = a + b$ ve $İm(z_1) = -1$,
$z_2 = 5i + 3a - b \Rightarrow Re(z_2) = 3a - b$ ve $İm(z_2) = 5$ olarak bulunur.

Bu değerler $Re(z_1) = İm(z_2)$ ve $Re(z_2) = İm(z_1)$ ifadelerinde yerine yazılırsa

$Re(z_1) = İm(z_2) \Rightarrow a + b = 5$........(I)
$Re(z_2) = İm(z_1) \Rightarrow 3a - b = -1$...(II)

(I) ve (II) nolu denklemler taraf taraf toplanırsa $4a = 4 \Rightarrow a = 1$ bulunur. Bulunan değer (I) de yerine yazılırsa $1 + b = 5 \Rightarrow b = 4$ bulunur. Buradan $a \cdot b = 1 \cdot 4 = 4$ olur.



Örnek 30

$z = 12 - \sqrt{-25}$ karmaşık sayısı veriliyor. $Re(z) + İm(z)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$z = 12 - \sqrt{-25} = 12 - \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \cdot \sqrt{25} = 12 - 5i$ olarak bulunur. Buradan

$z = 12 - 5i \Rightarrow Re(z) = 12$ ve $İm(z) = -5$ değerleri $Re(z) + İm(z)$ ifadesinde yerine yazılırsa
$Re(z) + İm(z) = 12 + (-5) = 7$ olur.



Örnek 31

$z = 7^{5a+3} - \left(7^{a^2-3}\right)i$ karmaşık sayısı veriliyor. $\dfrac{\text{İm}(z)}{\text{Re}(z)} = -1$ olduğuna göre a gerçek sayısının alabileceği değerleri bulunuz.



Çözüm

$z = 7^{5a+3} - \left(7^{a^2-3}\right)i \Rightarrow \text{Re}(z) = 7^{5a+3}$ ve $\text{İm}(z) = -7^{a^2-3}$ olarak bulunur. Bu değerler

$\dfrac{\text{İm}(z)}{\text{Re}(z)} = -1$ eşitliğinde yerine yazılırsa $\dfrac{-7^{a^2-3}}{7^{5a+3}} = -1 \Rightarrow -7^{a^2-3-5a-3} = -\left(7^0\right)$ olup

$a^2 - 3 - 5a - 3 = 0$

$a^2 - 5a - 6 = 0$

$(a-6)\cdot(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 6$ veya $a_2 = -1$ olur.



İpucu

$\sqrt{-1} = i$ sayısına **sanal sayı birimi** denir. i sanal sayı biriminin kuvvetleri,

$i^0 = 1$

$i^1 = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = (1)\cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = (i)\cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$

$i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot i = -i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

şeklinde olur.

$i^0 = i^4 = i^8 = 1$

$i^1 = i^5 = i$

$i^2 = i^6 = -1$

$i^3 = i^7 = -i$ olur.



Örnek 32

Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-3}$

b) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-49}$



Çözüm

a) $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = i \cdot i \cdot \sqrt{36} = i^2 \cdot 6 = -6$ olur.

b) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-49} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{49} = i \cdot i \cdot 4 \cdot i \cdot 7 = i^3 \cdot 28 = -28i$ olur.



Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ karmaşık sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek oluşturulan $a - bi$ karmaşık sayısına $a + bi$ **karmaşık sayısının eşleniği** denir ve $\overline{z} = a - bi$ ile gösterilir.



Örnek 33

Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = 2 + 7i$ **b)** $z_2 = -5 + i$ **c)** $z_3 = -4 - 7i$ **ç)** $z_4 = 2i$ **d)** $z_5 = -19$



Çözüm

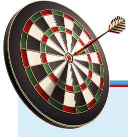
a) $z_1 = 2 + 7i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_1} = 2 - 7i$ olur.

b) $z_2 = -5 + i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_2} = -5 - i$ olur.

c) $z_3 = -4 - 7i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_3} = -4 + 7i$ olur.

ç) $z_4 = 2i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_4} = -2i$ olur.

d) $z_5 = -19$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z_5} = -19$ olur.



Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminde $\Delta < 0$ ise denklemin sanal kökleri vardır.

Kökler $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur ve bu kökler birbirinin eşleniğidir. Bir başka ifadeyle $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere sanal köklerden biri $m + ni$ ise diğeri $m - ni$ olur.



Örnek 34

$x^2 + 2x + 2 = 0$ denkleminin karmaşık sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.



Çözüm

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$ bulunur. Dolayısıyla bu denklemin sanal kökleri vardır.
Bu kökler;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = \frac{\not{2} \cdot (-1 + i)}{\not{2}} = -1 + i,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = \frac{\not{2} \cdot (-1 - i)}{\not{2}} = -1 - i \text{ olur.}$$

Buradan $ÇK = \{-1 + i, -1 - i\}$ olarak bulunur.



ALIŞTIRMALAR

1. $z = \sqrt{-25} + \sqrt[3]{-27}$ sayısını $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklinde yazınız.

2. $z = \sqrt{-36} - \sqrt[3]{-8}$ ifadesini $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklinde yazıp $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = 4 - 3i$

b) $z_2 = -5i + 2$

c) $z_3 = 6i$

ç) $z_4 = 7$

4. $z = -5 + 3i$ karmaşık sayısı için $Re(z) - İm(z)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $x^2 - 4x + 8 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

6. $x^2 - 4x + 6 = 0$ denklemi ile ilgili

I. İki farklı sanal kökü vardır.

II. Sanal köklerinden birisi $-2 - \sqrt{6}i$ dir.

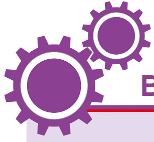
III. Kökler birbirinin eşleniğidir.

ifadelerinden hangisi ya da hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

7. $z = \sqrt[3]{a-1} - \sqrt{-a}$ karmaşık sayısının eşleneğinin sanal kısmı 3 olduğuna göre z karmaşık sayısını bulunuz.

8. x, y birer gerçek sayı olmak üzere $z = (x^2 + 1) + (y + x)i$ karmaşık sayısının gerçek kısmı 5, sanal kısmı 8 olduğuna göre y nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

10.4.1.4. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişki



Buluyorum

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri,

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğundan

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}+(-b-\cancel{\sqrt{\Delta}})}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ bulunur.

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})\cdot(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$= \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} \quad \text{“}\Delta = b^2-4ac\text{”}$$

$$= \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \dfrac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}$$

$$= \dfrac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}\cdot a} = \dfrac{c}{a}$$ bulunur.



İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ve $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ olur.



Örnek 35

$2x^2 - 3x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

a) $x_1 + x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.

b) $x_1 \cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$2x^2 - 3x + 4 = 0$ denkleminde $a = 2$, $b = -3$ ve $c = 4$ olur. Buradan

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-3)}{2} = \dfrac{3}{2}$,

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2} = 2$ olur.


Örnek 36

$5x^2+8x-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1+x_2+x_1\cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.


Çözüm

$5x^2+8x-3=0$ denkleminde $a=5$, $b=8$ ve $c=-3$ olur.

Buradan $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{8}{5}$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{5}$ değerleri $x_1+x_2+x_1\cdot x_2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=\left(-\frac{8}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{11}{5}$ olur.


Örnek 37

$x^2-4x+12=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2$ işleminin sonucunu bulunuz.


Çözüm

$(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2$ ifadesi $x_1\cdot x_2$ parantezine alınırsa $(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2=x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)$ olur.

$x^2-4x+12=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{(-4)}{1}=4$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{12}{1}=12$ olur.

Buradan $(x_1)^2\cdot x_2+x_1\cdot(x_2)^2=\underbrace{x_1\cdot x_2}_{12}\cdot\underbrace{(x_1+x_2)}_{4}=12\cdot 4=48$ olur.


Örnek 38

$x^2-8x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ ifadesinin değerini bulunuz.


Çözüm

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ ifadesi A olsun. $A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınırsa

$A^2=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2$
$A^2=(\sqrt{x_1})^2+2\cdot\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}+(\sqrt{x_2})^2$
$A^2=x_1+2\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2}+x_2$
$A^2=x_1+x_2+2\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2}$ olur.

$x^2-8x+4=0$ denkleminden $x_1+x_2=-\frac{(-8)}{1}=8$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{4}{1}=4$ bulunur.

Bu değerler $A^2=x_1+x_2+2\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$A^2=\underbrace{x_1+x_2}_{8}+2\cdot\sqrt{\underbrace{x_1\cdot x_2}_{4}}=8+4=12\Rightarrow A^2=12\Rightarrow A=\mp\sqrt{12}$ olur.

Buradan A ifadesi pozitif olduğundan $A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ olur.



Örnek 39

$x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere

a) $(x_1)^2 + (x_2)^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

b) $(x_1)^3 + (x_2)^3$ işleminin sonucunu bulunuz.



Çözüm

$x_1 + x_2$ ve $x_1 \cdot x_2$ değerleri $x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminden bulunursa

$x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} = 5$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} = 2$ olur.

a) $x_1 + x_2 = 5$ ve $x_1 \cdot x_2 = 2$ değerleri $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ eşitliğinde yerine yazılırsa $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 25 - 4 = 21$ olur.

b) $x_1 + x_2 = 5$ ve $x_1 \cdot x_2 = 2$ değerleri $(x_1)^3 + (x_2)^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2)$ eşitliğinde yerine yazılırsa $(x_1)^3 + (x_2)^3 = 5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5 = 95$ olur.



Örnek 40

m gerçek sayı olmak üzere $6x^2 + 2mx + 9 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir. $x_1 + x_2 = -5$ olduğuna göre m değerini bulunuz.



Çözüm

$6x^2 + 2mx + 9 = 0$ denkleminde $a = 6$, $b = 2m$ ve $c = 9$ olur. Buradan $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m}{6} = -\frac{m}{3}$ bulunur. $x_1 + x_2 = -5$ olduğundan $-\frac{m}{3} = -5 \Rightarrow m = 15$ olur.



Örnek 41

m sıfırdan farklı gerçek sayı olmak üzere $x^2 - (3m - 2)x + \frac{m+3}{-2m} = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olmak üzere $x_1 + x_2 = 1$ olduğuna göre $x_1 \cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$x^2 - (3m - 2)x + \frac{m+3}{-2m} = 0$ denkleminde

$x_1 + x_2 = -\frac{-(3m-2)}{1} = 1 \Rightarrow 3m - 2 = 1 \Rightarrow m = 1$ bulunur.

$x_1 \cdot x_2 = \frac{\frac{m+3}{-2m}}{1} = \frac{m+3}{-2m} = \frac{1+3}{(-2) \cdot 1} = \frac{4}{-2} = -2$ olur.



Örnek 42

$x^2+bx+27=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ve $x_1=(x_2)^2$ olduğuna göre b gerçek sayısının kaç olduğunu bulunuz.



Çözüm

$x^2+bx+27=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1 \cdot x_2=27$ olur. Bu eşitlikte x_1 yerine $(x_2)^2$ yazılırsa $(x_2)^2 \cdot x_2=27 \Rightarrow (x_2)^3=27 \Rightarrow x_2=3$ olur.

Bulunan $x_2=3$ değeri $x^2+bx+27=0$ denkleminin bir kökü olup bu denklemi sağlayacağından x yerine 3 yazılırsa $3^2+b \cdot 3+27=0 \Rightarrow 3b=-36 \Rightarrow b=-12$ olur.



Örnek 43

$m \neq \frac{1}{2}$ olmak üzere $(2m-1)x^2-(m-4)x+m-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1+x_2=3 \cdot x_1 \cdot x_2$ olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

$(2m-1)x^2-(m-4)x+m-2=0$ denkleminde

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m-4)}{2m-1}=\frac{m-4}{2m-1}$ ve $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2m-1}$ değerleri $x_1+x_2=3 \cdot x_1 \cdot x_2$ eşitliğinde

yerine yazılırsa

$$\frac{m-4}{\cancel{2m-1}}=3 \cdot \frac{(m-2)}{\cancel{2m-1}} \Rightarrow m-4=3 \cdot (m-2)$$
$$m-4=3m-6$$
$$2m=2$$
$$m=1 \text{ olur.}$$



Örnek 44

$x^2+4x+3m-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $2x_1-x_2=-2$ olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

$x^2+4x+3m-2=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{1}=-4$ bulunur. $x_1+x_2=-4$ ve $2x_1-x_2=-2$ denklemlerinin ortak çözümünden

$$x_1+\cancel{x_2}=-4$$
$$+\ \underline{2x_1-\cancel{x_2}=-2}$$

$3x_1=-6 \Rightarrow x_1=-2$ bulunup bu değer $x^2+4x+3m-2=0$ denkleminde x yerine yazılırsa

$$(-2)^2+4 \cdot (-2)+3m-2=0 \Rightarrow 4-8+3m-2=0$$
$$3m-6=0$$
$$m=2 \text{ olur.}$$



Örnek 45

$x^2+2mx+x+5=0$ denkleminin köklerinin ikişer fazlasının toplamı 7 olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

$x^2+2mx+x+5=x^2+(2m+1)x+5=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2m+1}{1}=-2m-1$ bulunur.

x_1 ve x_2 köklerinin ikişer fazlasının toplamı 7 ise $x_1+2+x_2+2=x_1+x_2+4=7 \Rightarrow x_1+x_2=3$ olup

$x_1+x_2=-2m-1=3 \Rightarrow m=-2$ olur.



Örnek 46

b, c, m, n $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2-bx+c=0$ denkleminin bir kökü 2 ve $x^2-mx+n=0$ denkleminin bir kökü 3 tür. Bu iki denklemin diğer kökleri ortak olduğuna göre $b-m$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

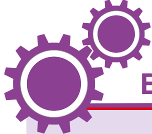
Verilen denklemlerin ortak kökü x_1 olsun.

$x^2-bx+c=0$ denkleminin kökler toplamı $x_1+2=-\frac{(-b)}{1}=b$, $x^2-mx+n=0$ denkleminin kökler toplamı $x_1+3=-\frac{(-m)}{1}=m$ olur. Buradan $x_1+3=m$ denkleminin her iki tarafı (-1) ile çarpılıp $x_1+2=b$ denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rl} & x_1+2=b \\ + & -x_1-3=-m \\ \hline & -1=b-m \end{array}$$

olur.

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Elde Etme



Buluyorum

$a \neq 0$ ve a, b, c $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı a ile bölünürse $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a} \Rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$ olur.

$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ ve $\frac{c}{a}=x_1 \cdot x_2$ değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$ bulunur. Buradan

kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem $x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$

biçiminde oluşturulur.

Bir başka ifadeyle kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazılırken sırasıyla

- $T=x_1+x_2$ değeri bulunur.
- $Ç=x_1\cdot x_2$ değeri bulunur.
- Bulunan T ve Ç değeri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılır.

Böylece ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem oluşturulmuş olur.



Örnek 47

Kökleri $x_1 = 5$ ve $x_2 = -3$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.



Çözüm

Kökler toplamı T, kökler çarpımı Ç olmak üzere
$T = x_1 + x_2 = 5 + (-3) = 2$, $Ç = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-3) = -15$ bulunur.

Bulunan T ve Ç değeri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x^2 - 2 \cdot x + (-15) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.



İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $m, n \in \mathbb{R}$ için bir kökü $m + \sqrt{n}$ ise diğer kökü $m - \sqrt{n}$ dir.



Örnek 48

Köklerinden biri $2 + \sqrt{3}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.



Çözüm

İkinci dereceden rasyonel katsayılı bir denklemin köklerinden biri $2 + \sqrt{3}$ ise diğer kökü $2 - \sqrt{3}$ tür.

Buradan $T = x_1 + x_2 = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$, $Ç = x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2 - 4x + 1 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.



Örnek 49

$x^2 - 4x + 5 = 0$ denkleminin köklerinin ikişer eksiğini kök kabul eden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.



Çözüm

$x^2 - 4x + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. İstenilen denklemin kökleri ise $x_1 - 2$ ve $x_2 - 2$ dir.

Buradan bu denklemin kökler toplamı $T = x_1 - 2 + x_2 - 2 = x_1 + x_2 - 4$ ....(I),

kökler çarpımı $Ç = (x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot (x_1 + x_2) + 4$ ....(II) bulunur.

$x^2 - 4x + 5 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$ olur.

Bu değerler (I) ve (II) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa $T = \underbrace{x_1 + x_2}_{4} - 4 = 4 - 4 = 0$ ve

$Ç = \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{5} - 2 \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_{4} + 4 = 5 - 8 + 4 = 1$ elde edilir. Buradan T ve Ç değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2 - 0 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.



Örnek 50

$x^2-3x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $2x_1-1$ ve $2x_2-1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.



Çözüm

$x^2-3x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere istenilen denklemde kökler toplamı
$T=2x_1-1+2x_2-1=2\cdot(x_1+x_2)-2$......(I),
kökler çarpımı $Ç=(2x_1-1)\cdot(2x_2-1)=4x_1\cdot x_2-2\cdot(x_1+x_2)+1$ ....(II) bulunur.
$x^2-3x+4=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(-3)}{1}=3$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}=4$ olur. Bu değerler

(I) ve (II) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa $T=2\cdot\underbrace{(x_1+x_2)}_{3}-2=2\cdot3-2=6-2=4$,

$Ç=4\cdot\underbrace{(x_1\cdot x_2)}_{4}-2\cdot\underbrace{(x_1+x_2)}_{3}+1=4\cdot4-2\cdot3+1=16-6+1=11$ elde edilir. Buradan T ve Ç değerleri

$x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2-4x+11=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.



Örnek 51

$2x^2-4x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.



Çözüm

$2x^2-4x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere istenilen denklemin kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ dir.

Buradan bu denklemin kökler toplamı $T=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$ ....(I),

kökler çarpımı $Ç=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1\cdot x_2}$ ....(II) bulunur.

$2x^2-4x+1=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(-4)}{2}=2$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ olur. Bu değerler

(I) ve (II) numaralı denklemlerde yerlerine yazılırsa $T=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ ve $Ç=\frac{1}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ elde edilir. Buradan T ve Ç değerleri $x^2-Tx+Ç=0$ denkleminde yerine yazılırsa $x^2-4x+2=0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.



Örnek 52

$3x^2-mx+n=0$ denkleminin kökleri $x^2+mx+2=0$ denkleminin köklerinden üçer fazla olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.



Çözüm

$3x^2-mx+n=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olursa $x^2+mx+2=0$ denkleminin kökleri,
(x_1-3) ve (x_2-3) olur. $3x^2-mx+n=0$ denkleminde kökler toplamı $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(-m)}{3}=\frac{m}{3}$,

$x^2+mx+2=0$ denkleminde kökler toplamı $(x_1-3)+(x_2-3)=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{1}=-m$ olur. Buradan

$(x_1-3)+(x_2-3)=-m\Rightarrow\underbrace{x_1+x_2}_{\frac{m}{3}}-6=-m\Rightarrow\frac{m}{3}-6=-m\Rightarrow\frac{m}{3}+m=6\Rightarrow\frac{4m}{3}=6$ ve $m=\frac{9}{2}$ olur.



ALIŞTIRMALAR

1. $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre

a) $x_1 + x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.

b) $x_1 \cdot x_2$ ifadesinin değerini bulunuz.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1^2 + x_2^2 = 2$ olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.

3. $(a-1)x^3 + (a+2)x^2 - x + a - 3 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

4. $ax^2 + bx + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere

I. $a, b \in \mathbb{R}$

II. $x_1 + x_2 = 5$

III. $x_1 \cdot x_2 = -1$

olduğuna göre $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $x^2 - (3+a)x - 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 = (x_2)^2$ olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

6. $x^2 - 7x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. $m \neq 0$, $mx^2 - x + 3m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 + x_2 = 4 \cdot x_1 \cdot x_2$ olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.

8. $3x^2 - 9x - 2a + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1 - 2x_2 = -3$ olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

9. Kökleri -2 ve 3 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

10. Köklerinden biri $3 - \sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

11. $x^2 - 8x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $(x_1 + 2)$ ve $(x_2 + 2)$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

a) $\triangle = b^2 - 4ac > 0$ ise bu denklemin

.... kökü vardır.

b) $\triangle = b^2 - 4ac = 0$ ise bu denklemin

.... vardır.

c) $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi .... dir.

B) Aşağıda verilen ifadelerle harflerle verilen formülleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

2. $a \neq 0$ ve a, b, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

1. $x_1 + x_2$
2. $x_1 \cdot x_2$
3. $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$

a) $-\frac{c}{b}$

b) $-\frac{c}{a}$

c) $-\frac{b}{a}$

ç) $\frac{a}{c}$

d) $\frac{c}{a}$

1.	2.	3.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını ilgili boşluklara yazınız.

3. $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü olduğuna göre m nin en büyük tam sayı değerini bulunuz.

4. $2x^2 + 4x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $a \neq 1$ olmak üzere $x^2 - 2ax + a + 1 = 0$ ve $x^2 + (a-3)x - 2a + 4 = 0$ denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

6. Bir ABC üçgeniyle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- BC kenarına ait yükseklik bu kenarın uzunluğundan 2 birim fazladır.
- BC kenarının uzunluğu 2 kat artırılır ve bu kenara ait yükseklik 3 birim azaltılırsa elde edilen yeni üçgenin alanı ABC üçgeninin alanından 6 birimkare fazladır.

Bu bilgilere göre ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

7 -9. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Bu kökler ve denklemle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- $x_1 + x_2 = 1$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$
- $\triangle = b^2 - 4ac > 0$

7. $(x_1)^3 + (x_2)^3$ işleminin sonucunu bulunuz.

8. $|x_1 - x_2|$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $(x_1 > x_2)$ olmak üzere $\frac{(x_1)^2 - x_1 + 6}{(x_2)^2 - x_2 - 1}$

işleminin sonucunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

10. Aşağıda ikinci dereceden denklemler ve bu denklemlere ait gerçek sayılardaki çözüm kümeleri verilmiştir.

I. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ise $ÇK = \{-2, 5\}$

II. $2x^2 - 7x - 3 = 0$ ise $ÇK = \{1, 3\}$

III. $x^2 - x + 4 = 0$ ise $ÇK = \{\ \}$

Yukarıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

11. $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminde

I. $\triangle < 0$ ise denklemin sanal iki kökü vardır.

II. $b > 0$ ise denklemin sanal iki kökü vardır.

III. $a > 0$ ve $c < 0$ ise denklemin gerçek iki kökü vardır.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri **daima** doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) I ve II E) II ve III

12. $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. $a \neq b$ olmak üzere $\forall a, b \in A$ için $x^2 + ax + b = 0$ şeklinde yazılabilecek denklemlerden kaç tanesinin gerçek kökü **yoktur**?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

13. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - 2ax + b = 0$ denkleminin bir kökü 1 ve $x^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü -2 olduğuna göre $4a - c$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 6 B) 3 C) 2 D) 0 E) -2

14. $z = \sqrt[5]{-32} + \sqrt{-4}$ olduğuna göre z karmaşık sayısının eşleniği aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2 + 2i$ B) $2 + 2i$ C) $2 - 2i$ D) $-2 - 2i$ E) $-2 - 4i$

15. $x^2 - 6x + 10 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + i$ B) $-1 - i$ C) $-3 - 3i$ D) $3 + i$ E) 1

16. $x^2 = -3 + 2\sqrt{2}$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{2} - 1$ B) $(-\sqrt{2} - 1)i$ C) $\sqrt{2} + 1$ D) $\sqrt{2} - 1$ E) $(\sqrt{2} - 1)i$

17. $m \neq 2$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(4 - 2m)x^2 + (3m - 1)x + m + 3 = 0$ denkleminin gerçek kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 + x_2 = 4$ ise $x_1 \cdot x_2$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

18. $4x^2 - 24x + 6a - 12 = 0$ denkleminin eşit iki kökü olduğuna göre a gerçek sayısının değeri kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

19. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$x^2-(a+2)x-5a+1=0$ denkleminin gerçek kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{3}{4}$ olduğuna göre bu köklerden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −4 B) 0 C) 1 D) 4 E) 5

20. İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere

I. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
II. $x_1+x_2=5$
III. $x_1\cdot(x_2)^2+(x_1)^2\cdot x_2=-30$

koşullarını sağlayan ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-5x-6=0$ B) $x^2+5x+6=0$
C) $x^2-3x+5=0$ D) $-x^2+2x+3=0$
E) $-x^2+5x-6=0$

21. Aşağıda denklemler ve bu denklemlerin kökleri verilmiştir.

I. $16^{x-1}=8^{x+2}$ denkleminin kökü x_1 dir.
II. $(2x-1)^5=(x+2)^5$ denkleminin kökü x_2 dir.
III. a, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2-(a-12)x+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Verilen bilgilere göre $a+c$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 55 B) 30 C) 25 D) 20 E) 5

22. x_1 ve x_2 birer gerçek sayı olmak üzere $x_1+x_2-3=0$ ve $2x_1-x_2+6=0$ eşitlikleri veriliyor. Buna göre kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-3x-4=0$ B) $x^2+3x-4=0$
C) $x^2+3x+4=0$ D) $x^2-3x+4=0$
E) $2x^2-3x-4=0$

23. $x^2-5x-7=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $7x^2-5x-1=0$ B) $7x^2+5x+1=0$
C) $7x^2+5x-1=0$ D) $x^2+5x-1=0$
E) $x^2-5x+1=0$

24. $-x^2+8x-16=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $(x_1)^2+(x_2)^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

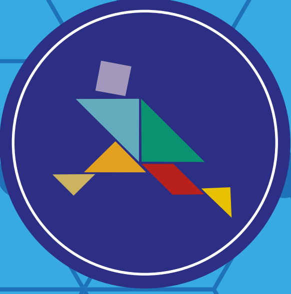
A) −32 B) 0 C) 32 D) 64 E) 96

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



GEOMETRİ

5





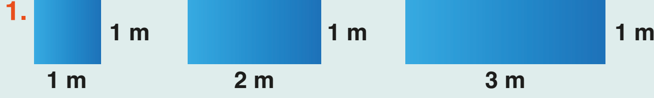


DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

10.5.1. Çokgenler
10.5.2. Dörtgenler ve Özellikleri
10.5.3. Özel Dörtgenler



Hazırlık Çalışması

1. 

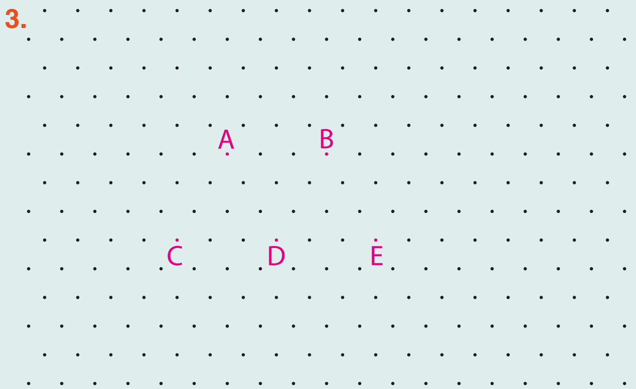
Yukarıdaki kare ve dikdörtgenlerden aşağıda verilen kurallara göre bir kare oluşturunuz.

- Bu parçaların her biri en az bir kere kullanılacaktır.
- Oluşturulan karenin alanı en küçük olacaktır.

Buna göre **en az** kaç parça kullanılabileceğini bulunuz.

2. 

Yukarıdaki özdeş 6 kibrit çöpünün tamamı kullanılarak kaç farklı düzgün çokgen oluşturulabileceğini bulunuz.

3. 

En yakın iki nokta arası uzaklığın 1 birim olduğu izometrik kağıt üzerindeki A, B, C, D ve E noktaları işaretleniyor. Buna göre

a) Köşeleri A, C, E ve B olan dörtgeni oluşturunuz.

b) Köşeleri B, D, E olan üçgeni oluşturunuz.

c) Köşeleri A, C, E ve B olan dörtgenin çevresinin uzunluğunun köşeleri B, D, E olan üçgenin çevresinin uzunluğuna oranını bulunuz.

10.5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER



İlk çağlarda Nil Nehri'nin belirli aralıklarla taşması sonucu tarlaların su altında kalıp sınırlarının silinmesi nedeniyle Mısırlılar, tarlalarının sınırlarını belirlemede sorunlar yaşıyorlardı. Tarlaların yüz ölçümünün hesaplanması ile bu sorunun ortadan kaldırılması için yeni bir bilim dalı olan geometrinin ortaya çıkmasını sağlayan ölçümlere başlandı.

Tarihe bakıldığında geometrinin birçok bilim dalıyla ilişkili olduğu ve diğer bilim dallarına katkı sağladığı tartışmasızdır. Geometri, ortaya çıktığı zamandan beri medeniyetin bulunduğu noktadan daha ileri seviyelere taşınmasında diğer bilimlerle beraber pay sahibi olmuştur.

Günümüze bakılacak olunursa 15 Temmuz Şehitler Abidesi'nde milletin darbe teşebbüsü karşısında ortaya koyduğu birlik, beraberlik ve kenetlenmeye bir atıf olan, çubuk elemanlardan oluşan kubbeyi oluşturan kollar; bütünüyle kâinatı ve sonsuzluğu sembolize eden kubbe geometriye dayalıdır. Ayrıca 77 milyon metrekarelik alanı ile dünyanın en büyük havalimanlarından biri olacak olan İstanbul üçüncü havalimanının elverişli şekilde kullanılmasını sağlayacak mimari, geometri bilimine dayalıdır. Bu projeye bakıldığında birçok geometrik şekli görmek mümkündür.

10.5.1. Çokgenler

Terimler ve Kavramlar

- Çokgen
- Düzgün Çokgen
- Köşegen



Neler Öğreneceksiniz?

Çokgen kavramını açıklayarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

10.5.1.1. Çokgen ve Çokgende Açı Kavramı



Bilgi

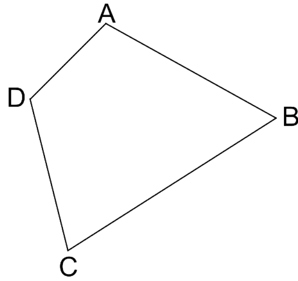
$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere düzlemde sadece $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarında kesişen ve bu noktalardan herhangi üçü doğrusal olmayan $[A_1A_2], [A_2A_3], ... , [A_{n-1}A_n], [A_nA_1]$ nın birleşim kümesine **çokgen** denir. Bu doğru parçalarına **çokgenin kenarları**; $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarına **çokgenin köşeleri** denir. Çokgenin komşu olmayan herhangi iki köşesini birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir. Bir çokgenin köşe sayısı ile kenar sayısı eşittir. Çokgenler köşe sayılarına veya kenar sayılarına göre adlandırılır (üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen gibi).



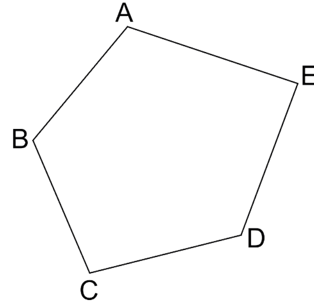
Örnek 1

Aşağıda verilen çokgenlerin köşelerini ve kenarlarını yazınız. Çokgenlerin herhangi bir köşesine ait iç ve dış açılarını şekil üzerinde gösteriniz.

a)



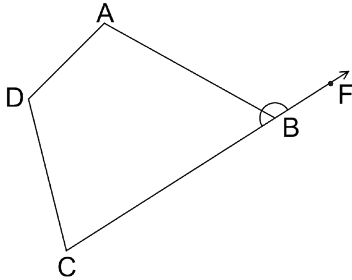
b)





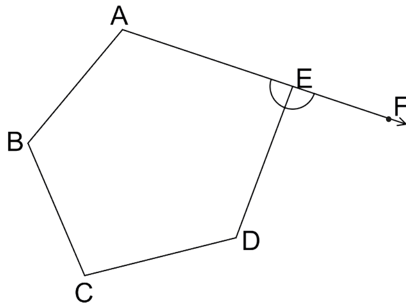
Çözüm

a) Şekilde A, B, C, D noktaları çokgenin köşeleri; [AD], [DC], [CB] ve [BA] çokgenin kenarlarıdır.



Şekilde ABC açısı B köşesine ait iç açı, ABF açısı B köşesine ait dış açıdır.

b) Şekilde A, B, C, D, E çokgenin köşeleri; [AE], [ED], [DC], [CB] ve [BA] çokgenin kenarlarıdır.



Şekilde A, E, F noktaları doğrusal olup AED açısı E köşesine ait iç açı, DEF açısı E köşesine ait dış açıdır. Aynı köşeye ait olan iç ve dış açının ölçüleri toplamı $180°$ dir.

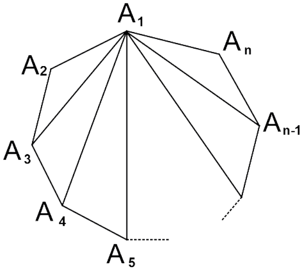


Örnek 2

$n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n kenarlı olan bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulunuz.



Çözüm



n kenarlı olan bir çokgenin bir köşesinden diğer köşelerine $(n-3)$ tane köşegen çizilir. Örneğin yanda verilen şekildeki çokgenin A_1 köşesinden A_1, A_2 ve A_n köşelerine köşegen çizilemez, diğer köşelerine köşegen çizilebilir.

Şekilde görüldüğü gibi $(\widehat{A_1A_2A_3})$, $(\widehat{A_1A_3A_4})$, ..., $(\widehat{A_1A_{n-1}A_n})$, olmak üzere toplam $(n-2)$ tane üçgen elde edilir. Bu üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını vereceğinden $(n-2)$ tane üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180°$ dir. Buradan n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180°$ olarak bulunur.



Örnek 3

İç açılarının ölçüleri toplamı $1260°$ olan bir çokgenin kenar sayısını bulunuz.



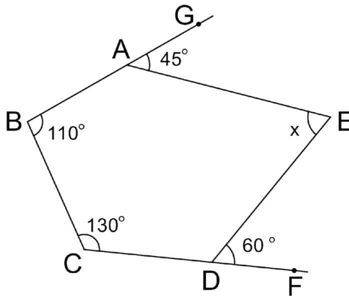
Çözüm

Çokgenin kenar sayısına n denilirse bu çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180° = 1260°$ olur.

Buradan eşitliğin her iki tarafı $180°$ ye bölünürse $\dfrac{(n-2)\cdot \cancel{180°}}{\cancel{180°}} = \dfrac{\cancel{1260°}^{\,7}}{\cancel{180°}_{\,1}} \Rightarrow n-2=7 \Rightarrow n=9$ olur.
Dolayısıyla çokgenin kenar sayısı 9 dur.



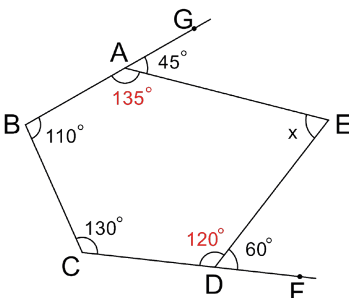
Örnek 4



Yandaki şekilde verilen beşgende C, D, F ve B, A, G noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{ABC}) = 110°$, $m(\widehat{BCD}) = 130°$, $m(\widehat{EDF}) = 60°$, $m(\widehat{EAG}) = 45°$ ve $m(\widehat{AED}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



Çokgen 5 kenarlı olduğundan çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, $(5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°$ olur.

Çokgenin A ve D köşelerine ait iç açılarının ölçüleri bulunup çokgenin iç açıları toplanırsa $135° + 110° + 130° + 120° + x = 540°$ bulunur. Bu denklemden $495° + x = 540° \Rightarrow x = 45°$ olur.



İpucu

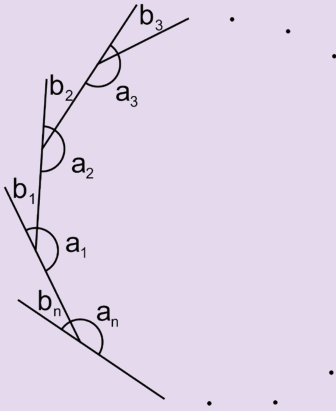
$n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ve dış açılarının ölçüleri $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ olsun. Buna göre çokgenin köşelerindeki iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan bu toplamlar yazılıp taraf tarafa toplanırsa



$$a_1 + b_1 = 180^\circ$$
$$a_2 + b_2 = 180^\circ$$
$$a_3 + b_3 = 180^\circ$$
$$\vdots$$
$$+ \quad a_n + b_n = 180^\circ$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}_{\text{İç açıların ölçüleri toplamı}} + \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}_{\text{Dış açıların ölçüleri toplamı}} = n \cdot 180^\circ$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ + b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = n \cdot 180^\circ$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = 360^\circ \text{ bulunur.}$$



Örnek 5

İç açılarının ölçüleri toplamı dış açılarının ölçüleri toplamına eşit olan çokgenin kenar sayısını bulunuz.



Çözüm

Çokgenin kenar sayısı n olsun. Çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2) \cdot 180^\circ$ ve dış açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan $(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \Rightarrow n-2=2$ ve $n=4$ bulunur. Dolayısıyla çokgenin kenar sayısı 4 tür.



Örnek 6

İç açılarının ölçüleri toplamı dış açılarının ölçüleri toplamının 5 katı olan bir çokgenin kenar sayısını bulunuz.



Çözüm

Çokgenin kenar sayısına n denilir ve çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı olan $(n-2) \cdot 180^\circ$, dış açılarının ölçüleri toplamı olan 360° nin 5 katına eşitlenirse

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 360^\circ$$
$$\frac{(n-2) \cdot \cancel{180^\circ}}{\cancel{180^\circ}} = \frac{\cancel{1800^\circ}\ 10}{\cancel{180^\circ}\ 1}$$
$$n - 2 = 10$$
$$n = 12 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla çokgenin kenar sayısı 12 dir.



Örnek 7

İki iç açısının ölçüleri 110° ve 160° olan bir çokgenin diğer iç açıları eşit ve 150° dir. Buna göre bu çokgenin kenar sayısını bulunuz.



Çözüm

İç açısının ölçüsü 110° olan köşeye ait dış açının ölçüsü $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ ve iç açısının ölçüsü 160° olan köşeye ait dış açının ölçüsü $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$ olur. Çokgenin kenar sayısı n olursa çokgenin n sayıda köşesi ve n sayıda dış açısı olur. Bulunan iki açı dışındaki $(n-2)$ tane açının iç açılarının ölçüsü 150° ise bu köşelere ait dış açılarının ölçüleri de $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ olur. Dış açıların ölçüleri toplamı 360° ye eşitlenirse

$$70^\circ + 20^\circ + \underbrace{30^\circ + 30^\circ + ... + 30^\circ}_{(n-2) \text{ tane}} = 360^\circ$$

$$90^\circ + (n-2) \cdot 30^\circ = 360^\circ$$

$$(n-2) \cdot 30^\circ = 270^\circ$$

$$n - 2 = 9$$

$$n = 11 \text{ olur.}$$

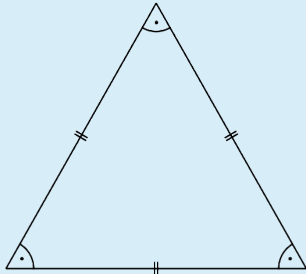
Dolayısıyla çokgenin kenar sayısı 11 dir.

Düzgün Çokgenler

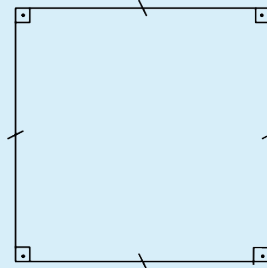


Bilgi

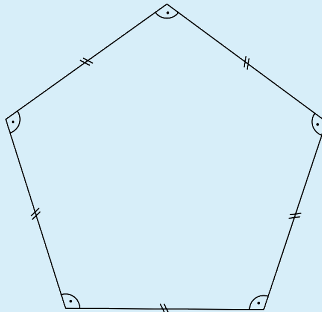
Bütün kenar uzunlukları eşit ve iç veya dış açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir. $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n kenarlı bir düzgün çokgenin dış açılarının ölçüleri de eşit olduğundan bir dış açının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n}$ dir. n kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ olur. Eşkenar üçgen ve kare dışındaki düzgün çokgenler adlandırılırken başına "düzgün" kelimesi getirilir.



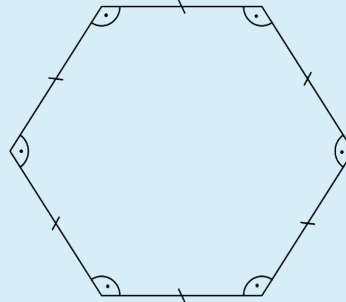
Düzgün üçgen
(Eşkenar üçgen)



Düzgün dörtgen
(Kare)



Düzgün beşgen



Düzgün altıgen

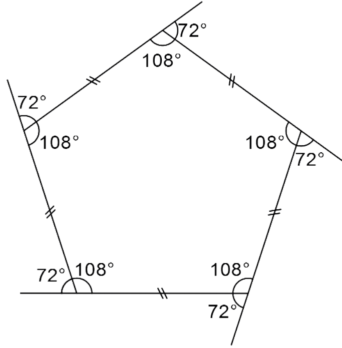


Örnek 8

Bir düzgün beşgenin iç ve dış açılarının ölçülerini bulunuz.



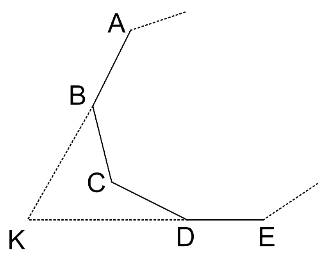
Çözüm



Bir düzgün beşgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ olur. Bir iç açısının ölçüsü ise $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ olur. Bu düzgün çokgen yandaki gibi gösterilebilir.



Örnek 9

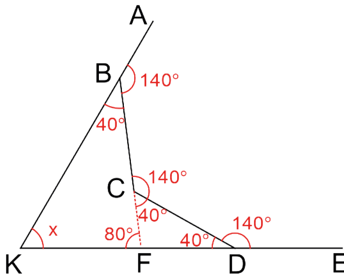


Yandaki şekilde ABCDE... düzgün dokuzgeninin ardışık AB, BC, CD ve DE kenarları çizilmiştir. K, D, E noktaları ve K, B, A noktaları doğrusaldır. Buna göre AKE açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

Bir düzgün dokuzgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ olur. Bir iç açısının ölçüsü ise $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ olur. Bu açılar aşağıdaki gibi yerleştirilsin ve AKE açısının ölçüsüne x denilsin.



Ayrıca B, C, F noktaları doğrusal olacak şekilde [CF] çizilirse CFD üçgeni elde edilir. Üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşit olduğundan $m(\widehat{CFK}) = 80^\circ$ olur. BKF üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° ye eşitlenirse

$$x + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$
$$x + 120^\circ = 180^\circ$$
$$x = 60^\circ$$ olarak bulunur.



Örnek 10

Bir iç açısının ölçüsü, bir dış açısının ölçüsünün 5 katı olan düzgün çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

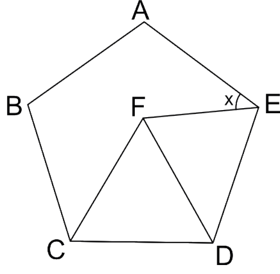


Çözüm

Bir düzgün çokgenin herhangi bir dış açısının ölçüsü x olsun. Bu durumda bir iç açısının ölçüsü 5x olur. Aynı köşeye ait bir iç açı ölçüsüyle bir dış açı ölçüsü toplamı 180° olacağından $x + 5x = 180^\circ$ ve $x = 30^\circ$ bulunur. Bir dış açısının ölçüsü 30° olan düzgün çokgenin kenar sayısı $\frac{360^\circ}{n} = 30^\circ$ denklemiyle bulunur. Buradan $n = 12$ olup çokgen 12 kenarlıdır.



Örnek 11

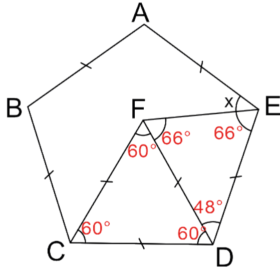


Yandaki şekilde ABCDE düzgün beşgen ve CFD eşkenar üçgendir. Buna göre AEF açısının ölçüsü x olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

Düzgün beşgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ olur. Bir iç açısının ölçüsü ise $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ olur. Bu açılar ve eşkenar üçgenin açıları aşağıdaki şekilde olduğu gibi yerleştirilir.



Buradan $|CD| = |FD| = |DE|$ olup FDE ikizkenar üçgendir. FDE açısının ölçüsü $108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ olur. FED ikizkenar üçgen olduğundan tepe açısı 180° den çıkarılırsa $180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$ olur. Üçgenin taban açılarının ölçüleri eşit olacağından $\frac{132^\circ}{2} = 66^\circ$ bulunur.

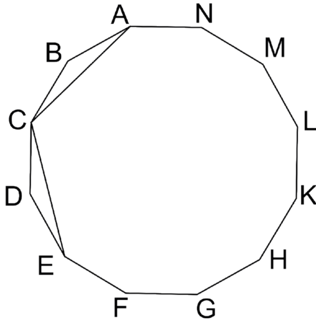
$$m(\widehat{AED}) = x + m(\widehat{FED})$$

Buradan $108^\circ = x + 66^\circ$

$$x = 42^\circ \text{ olur.}$$



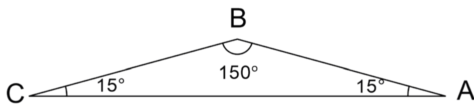
Örnek 12

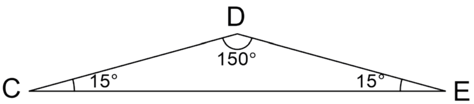


Yandaki şekilde ABCDEFGHKLMN düzgün onikigen olduğuna göre ACE açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm





Düzgün onikigenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ olur. Bir iç açısının ölçüsü $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ olur. ABC üçgeninde $|AB| = |BC|$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 15^\circ$ olur. Aynı şekilde CDE üçgeninde de $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{DCE}) = 15^\circ$ olur. Düzgün onikigende ABC ve EDC üçgenlerinin açıları yerleştirilirse $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{DCE})$

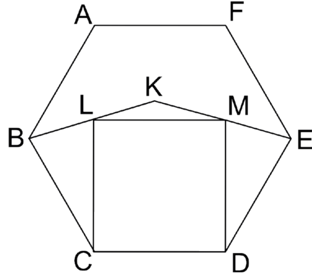
$$150^\circ = 15^\circ + m(\widehat{ACE}) + 15^\circ$$

$$150^\circ = 30^\circ + m(\widehat{ACE})$$

$$120^\circ = m(\widehat{ACE}) \text{ olur.}$$



Örnek 13

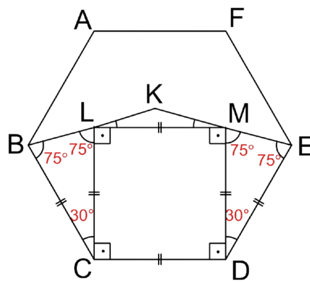


Yandaki şekilde ABCDEF düzgün altıgen ve CDML karedir. B, L, K noktaları ve K, M, E noktaları doğrusal olduğuna göre LKM açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

Düzgün altıgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ve bir iç açısının ölçüsü ise $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ dir. Karenin iç açıları da 90^o olup bu açılar aşağıdaki şekilde olduğu gibi yerleştirilir.



$|BC| = |CL| = |CD| = |DM| = |DE|$ olduğundan BLC ve MDE ikizkenar üçgenlerdir.

Buradan $m(\widehat{KBC}) = m(\widehat{BLC}) = m(\widehat{KED}) = m(\widehat{DME})$ olup bu açıların her birinin ölçüsü $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, $\frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ olur.

$$m(\widehat{KML}) + m(\widehat{LMD}) + m(\widehat{DME}) = 180^\circ$$
$$m(\widehat{KML}) + 90^\circ + 75^\circ = 180^\circ$$
$$m(\widehat{KML}) = 15^\circ \text{ bulunur.}$$

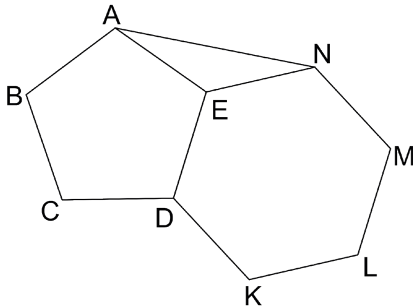
Benzer şekilde $m(\widehat{KLM}) = 15^\circ$ olur.

KLM üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$$m(\widehat{KLM}) + m(\widehat{KML}) + m(\widehat{LKM}) = 180^\circ$$
$$15^\circ + 15^\circ + m(\widehat{LKM}) = 180^\circ$$
$$m(\widehat{LKM}) = 150^\circ \text{ bulunur.}$$



Örnek 14



Yandaki şekilde ABCDE düzgün beşgeni ve DKLMNE düzgün altıgeni verilmiştir. Buna göre NAE açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



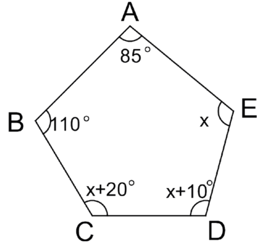
Çözüm

ABCDE düzgün beşgeni ile DKLMNE düzgün altıgeninin DE kenarı ortak olup $|AE| = |EN|$ olur.
ABCDE düzgün beşgeninde $m(\widehat{AED}) = 108^\circ$ ve DKLMNE düzgün altıgeninde $m(\widehat{DEN}) = 120^\circ$ ise $m(\widehat{AEN}) = 360^\circ - 108^\circ - 120^\circ = 132^\circ$ olur. $m(\widehat{NAE}) + m(\widehat{ANE}) = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$ olup AEN ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{NAE}) = \frac{48^\circ}{2} = 24^\circ$ bulunur.



ALIŞTIRMALAR

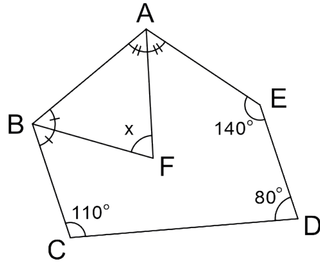
1.



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{A}) = 85^\circ$, $m(\widehat{B}) = 110^\circ$ $m(\widehat{C}) = x + 20^\circ$, $m(\widehat{D}) = x + 10^\circ$ ve $m(\widehat{E}) = x$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

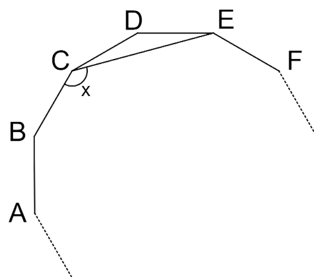
2. Bir altıgen ile bir yedigenin iç açıları ölçüleri toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{BCD}) = 110^\circ$, $m(\widehat{CDE}) = 80^\circ$, $m(\widehat{DEA}) = 140^\circ$; $[BF]$ ABC açısının ve $[AF]$ BAE açısının açıortayı ve $m(\widehat{AFB}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

4.

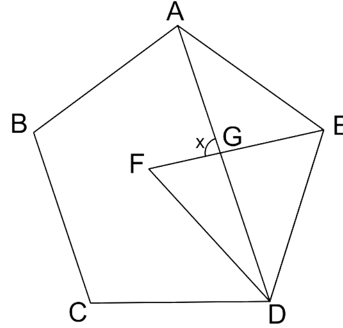


Yukarıdaki şekilde A, B, C, D, E, F noktaları bir düzgün onsekizgenin ardışık 6 köşesidir. $m(\widehat{BCE}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

5. İç açılarının ölçüleri toplamı 1440° olan bir çokgenin kenar sayısını bulunuz.

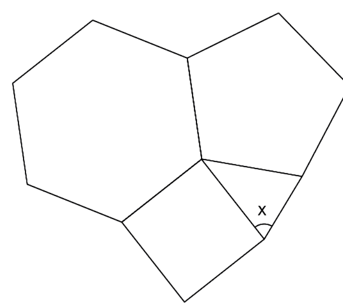
6. Bir iç açısının ölçüsü bir dış açısının ölçüsünün 4 katından 45° eksik olan bir düzgün çokgenin kenar sayısını bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde ABCDE düzgün beşgen ve EFD eşkenar üçgendir. A, G, D noktaları doğrusal, $[AD] \cap [EF] = \{G\}$ ve $m(\widehat{AGF}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde kare, düzgün beşgen ve düzgün altıgen verilmiştir. Buna göre x açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

10.5.2. Dörtgenler ve Özellikleri



Terimler ve Kavramlar
- Dışbükey Dörtgen
- İçbükey Dörtgen
- Köşegen
- Çevre
- Alan

Sembol ve Gösterimler
- Ç(ABCD)
- A(ABCD)





Neler Öğreneceksiniz?

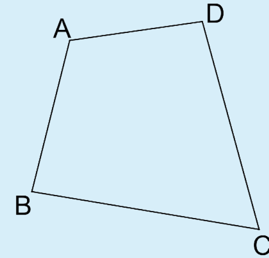
Dörtgenin temel elemanlarını ve özelliklerini açıklayarak problemler çözmeyi öğreneceksiniz.

10.5.2.1. Dörtgenin Temel Elemanları ve Özellikleri



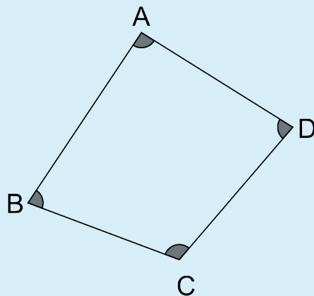
Bilgi

Herhangi üçü bir doğru üzerinde bulunmayan dört noktayı ardışık olarak birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı düzlemsel şekillere **dörtgen** denir.

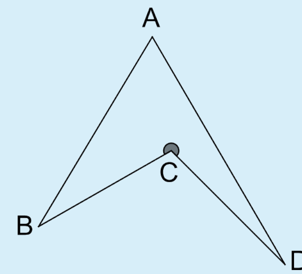


Bir dörtgenin temel elemanları köşeleri, açıları ve kenarlarıdır. Yandaki şekilde ABCD dörtgeni verilmiştir. Bu dörtgen için A, B, C ve D noktaları dörtgenin köşeleri; $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ dörtgenin kenarları; $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ ve $\widehat{CDA}$ ise dörtgenin açılarıdır.

Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan dörtgene **dışbükey dörtgen**, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene **içbükey dörtgen** denir.



Dışbükey dörtgen



İçbükey dörtgen

Bu bölümde dörtgen denildiğinde aksi belirtilmedikçe dışbükey dörtgen anlaşılacaktır.



Örnek 1

Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamını ve dış açılarının ölçüleri toplamını bulunuz.

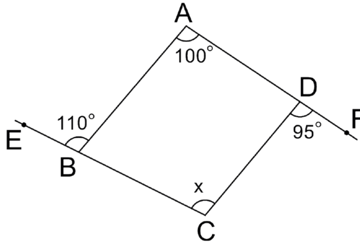


Çözüm

n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^\circ$ dir.
Buradan dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(4-2)\cdot 180^\circ = 2\cdot 180^\circ = 360^\circ$ olur.
Çokgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan dörtgenin de dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



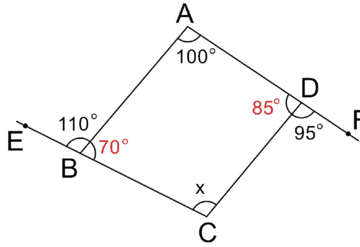
Örnek 2



Şekildeki ABCD dörtgeninde A, D, F ve C, B, E noktaları doğrusal olmak üzere $m(\widehat{BAF}) = 100^\circ$, $m(\widehat{CDF}) = 95^\circ$, $m(\widehat{ABE}) = 110^\circ$ ve $m(\widehat{ECD}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



A, D, F ve C, B, E noktaları doğrusal olduğundan B ve D köşelerindeki iç açılarının ölçüleri, 180° den dış açıların ölçüleri çıkarılarak şekildeki gibi bulunur.
Buradan dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan

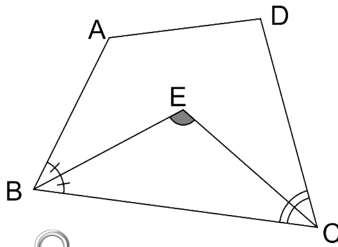
$$x + 70^\circ + 100^\circ + 85^\circ = 360^\circ$$

$$x + 255^\circ = 360^\circ \text{ bulunur.}$$

$$x = 105^\circ$$



Örnek 3



Şekildeki ABCD dörtgeninde $[BE]$, ABC açısının ve $[CE]$, DCB açısının açıortayıdır. Buna göre $m(\widehat{BEC}) = \dfrac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2}$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm

ABCD dörtgeninde

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

$$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 360^\circ - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}))$$

Eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünürse

$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} = 180^\circ - \frac{(m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}))}{2} \text{ olur.} \dots \text{(I)}$$

BEC üçgeninde

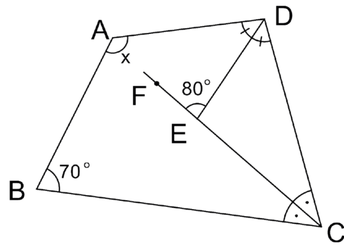
$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} + m(\widehat{E}) = 180^\circ$$

$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} = 180^\circ - m(\widehat{E}) \text{ olur.} \dots \text{(II)}$$

(I) ve (II) nolu eşitliklerden $180^\circ - \dfrac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2} = 180^\circ - m(\widehat{E}) \Rightarrow m(\widehat{E}) = m(\widehat{BEC}) = \dfrac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2}$ olur.



Örnek 4



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde C, E, F noktaları doğrusal; [DE] ve [CF sırasıyla ADC ve BCD açılarının açıortayı; $m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$, $m(\widehat{DEF}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BAD}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



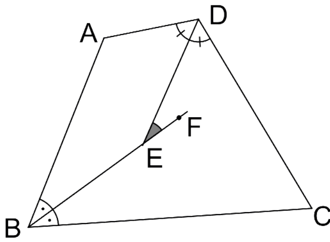
Çözüm

DEC üçgeninde $m(\widehat{DEC}) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ olur. [DE] ve [CF açıortay olduğundan

$$m(\widehat{DEC}) = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{x + 70^\circ}{2} \Rightarrow x + 70^\circ = 200^\circ \Rightarrow x = 130^\circ \text{ olur.}$$



Örnek 5



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde B, E, F noktaları doğrusal olup [BF], ABC açısının ve [DE], ADC açısının açıortayıdır. Buna göre

$$m(\widehat{DEF}) = \frac{\left| m(\widehat{A}) - m(\widehat{C}) \right|}{2}$$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm

ABCD dörtgeninde,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

$$m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}))$$

Eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünürse

$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} = 180^\circ - \frac{(m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}))}{2} \text{ olur. ....(I)}$$

ABED dörtgeninde

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{DEB}) + \frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} = 360^\circ$$

$$\frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} = 360^\circ - m(\widehat{A}) - m(\widehat{DEB}) \text{ olur. ....(II)}$$

(I) ve (II) nolu eşitliklerden

$$180^\circ - \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})}{2} = 360^\circ - m(\widehat{A}) - m(\widehat{DEB})$$

$$180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{C})}{2} = 360^\circ - m(\widehat{A}) - (180^\circ - m(\widehat{DEF}))$$

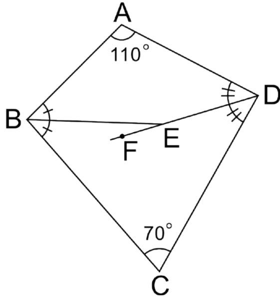
$$\frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{C})}{2} = m(\widehat{DEF}) \text{ olur.}$$

$m(\widehat{A})$ ile $m(\widehat{C})$ arasındaki büyüklük ilişkisi bilinmediğinden ve $m(\widehat{DEF})$ negatif olamayacağından

$$m(\widehat{DEF}) = \frac{\left| m(\widehat{A}) - m(\widehat{C}) \right|}{2} \text{ olur.}$$



Örnek 6



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde D, E, F noktaları doğrusal, [DF ve [BE] sırasıyla ADC ve ABC açılarının açıortayıdır. $m(\widehat{BAD}) = 110°$, $m(\widehat{BCD}) = 70°$ olduğuna göre BED açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

ABCD dörtgeninde [DF ve [BE] açıortay olduğundan

$$m(\widehat{BEF}) = \frac{|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})|}{2} = \frac{|110° - 70°|}{2} = 20° \text{ olur.}$$

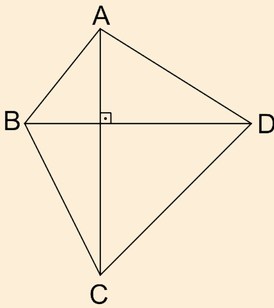
$$m(\widehat{BEF}) + m(\widehat{BED}) = 180°$$

$$20° + m(\widehat{BED}) = 180°$$

$$m(\widehat{BED}) = 160° \text{ olarak bulunur.}$$



İpucu

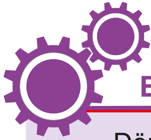


Köşegenleri dik kesişen bir ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamları birbirine eşittir.

Şekildeki ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan

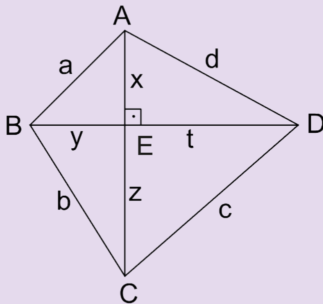
$|AB|^2 + |DC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

Dörtgenin kenar uzunlukları $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ ile köşegen uzunluklarının parçaları da $|AE| = x$, $|BE| = y$, $|EC| = z$, $|ED| = t$, ile şekildeki gibi adlandırılsın. AED ve CED üçgenlerinde Pisagor teoremi ile



$a^2 = x^2 + y^2$ ve $c^2 = z^2 + t^2$ olur. Buradan

$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ elde edilir. ....(I)

AED ve BEC üçgenlerinde Pisagor teoremi ile

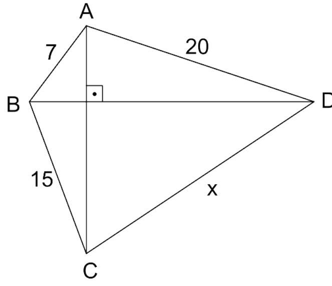
$b^2 = y^2 + z^2$ ve $d^2 = x^2 + t^2$ olur. Buradan

$b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ elde edilir. ....(II)

(I) ve (II) den $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ elde edilir.



Örnek 7



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$; $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|AD| = 20$ cm ve $|CD| = x$ cm olduğuna göre x değerini ve ABCD dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

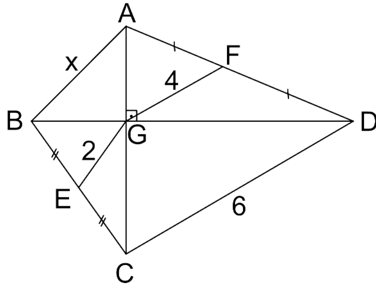


Çözüm

ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan $|AB|^2 + |DC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ olur. Buradan
$7^2 + x^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow 49 + x^2 = 225 + 400 \Rightarrow 49 + x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$ olur.
ABCD dörtgeninin çevresi $7 + 15 + 24 + 20 = 66$ cm olur.



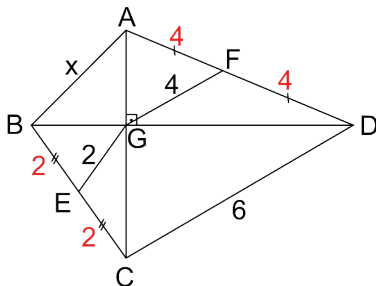
Örnek 8



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$; $|BE| = |EC|$, $|AF| = |FD|$; $|GE| = 2$ cm, $|GF| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm ve $|AB| = x$ cm olduğuna göre x değerini bulunuz.



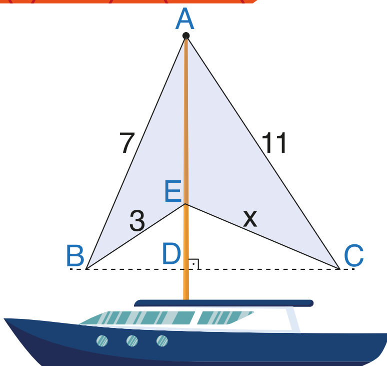
Çözüm



Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısı oduğundan $|BE| = |EC| = |GE| = 2$ cm ve $|AF| = |FD| = |GF| = 4$ cm olur. Bu değerler yandaki şekilde verilen gibi gösterilir.
Buradan $|AD| = 8$ cm ve $|BC| = 4$ cm olur. ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan $|AB|^2 + |DC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ olur. Buradan
$x^2 + 6^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 + 36 = 64 + 16 \Rightarrow x^2 + 36 = 80 \Rightarrow x^2 = 44$
$\Rightarrow x = 2\sqrt{11}$ olur.

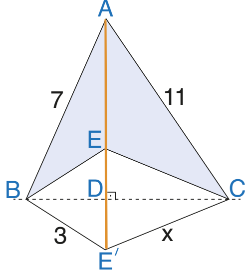


Örnek 9



Yandaki şekilde verilen teknenin yelkenlerinin boyutları $|AB| = 7$ m, $|AC| = 11$ m, $|BE| = 3$ m olarak verilmiştir. $[AD] \perp [BC]$ olduğuna göre $|EC| = x$ uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

Çözüm

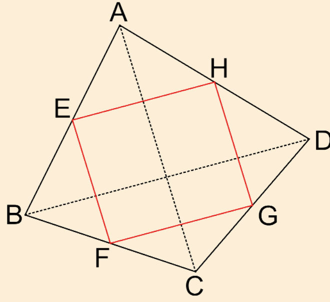


Yandaki şekilde ABEC dörtgeninde BEC üçgeninin $[BC]$ na göre yansıması $BE'C$ üçgeni olur. $ABE'C$ dörtgeninde $[AE'] \perp [BC]$ olduğundan

$$7^2 + x^2 = 11^2 + 3^2 \Rightarrow 49 + x^2 = 121 + 9$$
$$\Rightarrow 49 + x^2 = 130$$
$$\Rightarrow x^2 = 81$$
$$\Rightarrow x = 9 \text{ m olur.}$$

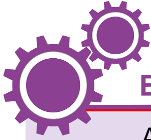


İpucu

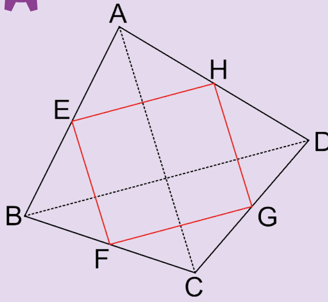


Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ dörtgenin köşegenleridir. E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları ise $Ç(EFGH) = |AC| + |BD|$ olur.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



Yandaki şekilde $[HG]$ ve $[EF]$ sırasıyla $\widehat{ADC}$ ve $\widehat{ABC}$ nin orta tabanları olduğundan $[HG] \,/\!/\, [AC] \,/\!/\, [EF]$ ve $|HG| = |EF| = \dfrac{|AC|}{2}$ olur.

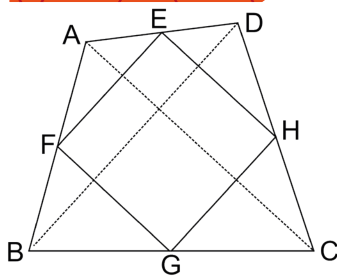
$[EH]$ ve $[FG]$ sırasıyla $\widehat{BAD}$ ve $\widehat{BCD}$ nin orta tabanları olduğundan $[EH] \,/\!/\, [BD] \,/\!/\, [FG]$ ve $|EH| = |FG| = \dfrac{|BD|}{2}$ olur.

Bu durumda $Ç(EFGH) = |EF| + |FG| + |GH| + |HE|$

$$= \frac{|AC|}{2} + \frac{|BD|}{2} + \frac{|AC|}{2} + \frac{|BD|}{2}$$
$$= |AC| + |BD| \text{ bulunur.}$$



Örnek 10



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AC| = 16$ cm ve $|BD| = 14$ cm olduğuna göre EFGH dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

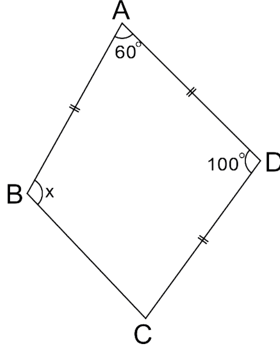
Çözüm

ABCD dörtgeninde E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan
$Ç(EFGH) = |AC| + |BD| = 16 + 14 = 30$ cm olarak bulunur.



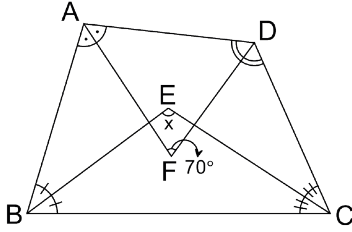
ALIŞTIRMALAR

1.



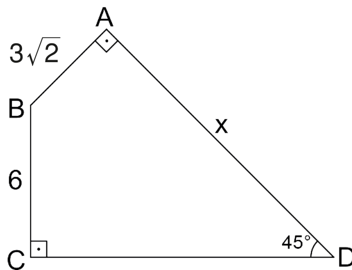
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $|AB| = |AD| = |DC|$; $m(\widehat{BAD}) = 60°$, $m(\widehat{ADC}) = 100°$ ve $m(\widehat{ABC}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



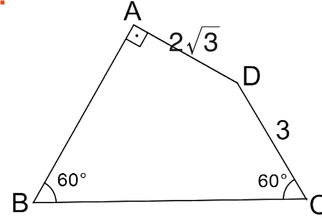
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde
$[AF]$, BAD açısının;
$[BE]$, ABC açısının;
$[CE]$, BCD açısının;
$[DF]$, ADC açısının açıortayıdır.
$m(\widehat{AFD}) = 70°$ ve $m(\widehat{BEC}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



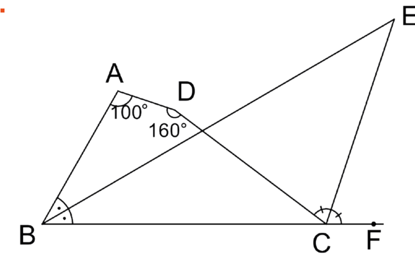
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AB] \perp [AD]$, $[BC] \perp [CD]$; $m(\widehat{ADC}) = 45°$; $|BC| = 6$ cm, $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm, $|AD| = x$ cm olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



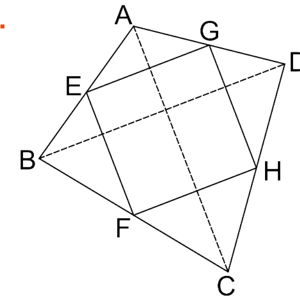
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $m(\widehat{ABC}) = 60°$, $m(\widehat{BCD}) = 60°$; $[AB] \perp [AD]$; $|AD| = 2\sqrt{3}$ cm, $|DC| = 3$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[BE]$ ABC açısının, $[CE]$ DCF açısının açıortayıdır. $m(\widehat{BAD}) = 100°$, $m(\widehat{ADC}) = 160°$ olduğuna göre BEC açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AC| + |BD| = 24$ cm olduğuna göre EFGH dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

10.5.3. Özel Dörtgenler

Terimler ve Kavramlar

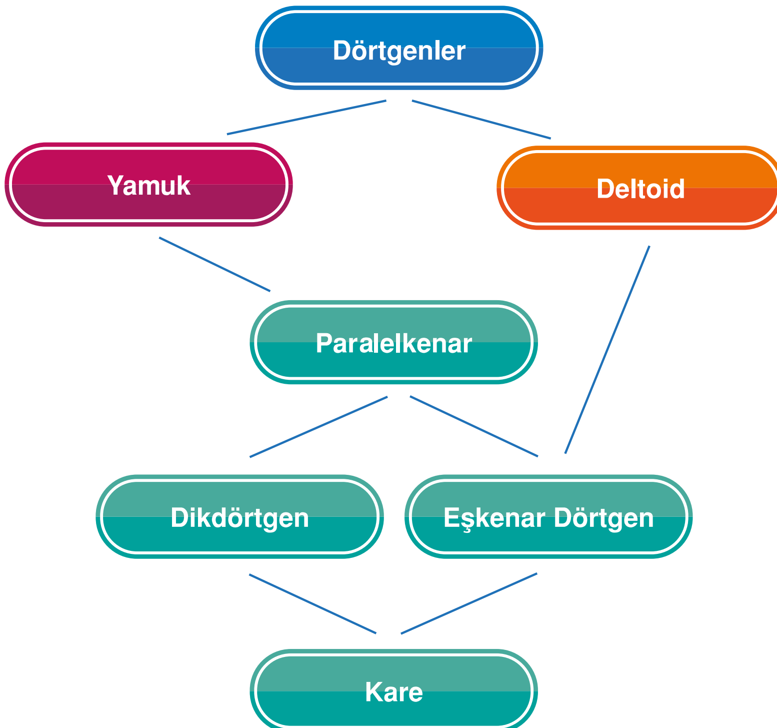
- Yamuk
- İkizkenar Yamuk
- Dik Yamuk
- Paralelkenar
- Eşkenar Dörtgen
- Dikdörtgen
- Kare
- Deltoid

Neler Öğreneceksiniz?

Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini açıklayarak problemler çözmeyi öğreneceksiniz.

10.5.3.1. Özel Dörtgenlerin Açı, Kenar, Köşegen ve Alan Özellikleri

Özel dörtgenler olan yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare, deltoid denilen çokgenlerin birbirlerine benzer olan birçok özelliği vardır. Bu sebeple bu dörtgenler incelenirken aralarındaki hiyerarşik ilişki dikkate alınmalıdır.
Aşağıda verilen görselde dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişki genelden özele doğru verilmiştir.



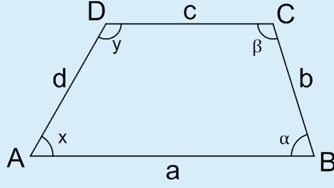
- Paralelkenar aynı zamanda yamuktur.
- Dikdörtgen aynı zamanda paralelkenardır.
- Eşkenar dörtgen aynı zamanda paralelkenar ve deltoittir.
- Kare aynı zamanda eşkenar dörtgen ve deltoittir.

Yamuk ve Özellikleri



Bilgi

En az iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir.

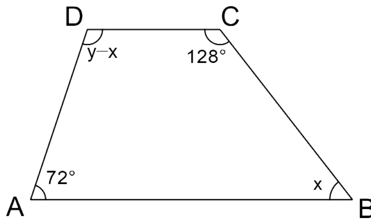


Yandaki ABCD yamuğunda

- $[AB] \parallel [DC]$ olur.
- $[AB]$ **alt taban** ve $[DC]$ **üst taban** olarak isimlendirilir.
- $x + y = 180^\circ$ ve $\alpha + \beta = 180^\circ$ olur.



Örnek 1



Yandaki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$ ve $m(\widehat{DAB}) = 72^\circ$, $m(\widehat{DCB}) = 128^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = x$ ve $m(\widehat{ADC}) = y - x$ olduğuna göre y değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

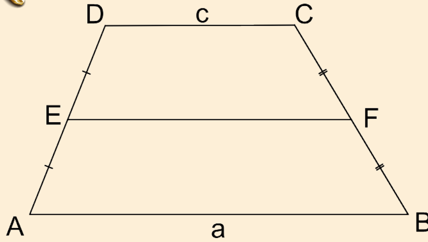


Çözüm

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow x + 128^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 52^\circ$ olur. Buradan
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ \Rightarrow 72^\circ + y - x = 180^\circ \Rightarrow 72^\circ + y - 52^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 160^\circ$ bulunur.

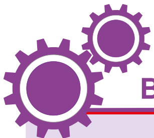


İpucu

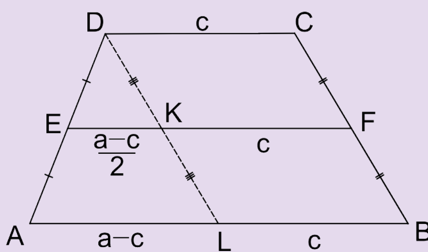


Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ olsun. $[AD]$ ile $[BC]$ nın orta noktaları olan E ile F noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.
$[EF]$ orta taban olmak üzere $[EF] \parallel [AB] \parallel [DC]$ ve $|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} = \dfrac{a + c}{2}$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



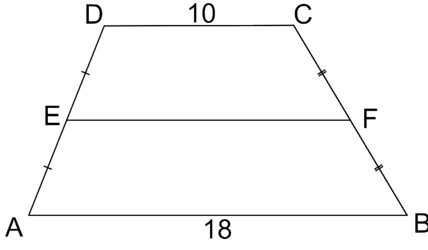
Buluyorum



Yandaki şekilde $[DL] \parallel [CB]$ olacak şekilde $[DL]$ çizilir. Bu durumda DLBC, DKFC ve KLBF dörtgenleri paralelkenar olur. Paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan $|LB| = |KF| = |DC| = c$ ve $|DK| = |KL|$ olur. Buradan $|AL| = a - c$ ve ADL üçgeninde $[EK]$ orta taban olduğundan $|EK| = \dfrac{a - c}{2}$ olur.
Sonuç olarak $|EF| = \dfrac{a - c}{2} + c \Rightarrow |EF| = \dfrac{a + c}{2}$ olmaktadır.



Örnek 2



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $|DC| = 10$ cm ve $|AB| = 18$ cm olduğuna göre ABCD yamuğunun orta taban uzunluğu olan $|EF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



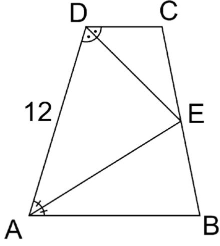
Çözüm

Orta taban uzunluğu, alt taban uzunluğu ile üst taban uzunluğunun toplamının yarısı olduğundan

$|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} = \dfrac{18+10}{2} = 14$ cm olur.



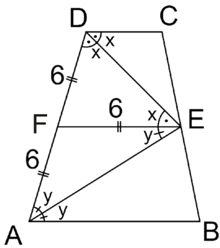
Örnek 3



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DE]$ ADC açısının açıortayı ve $[AE]$ DAB açısının açıortayı olmak üzere $|AD| = 12$ cm olduğuna göre $|AB| + |DC|$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



Şekildeki E noktasından $[EF] \parallel [AB] \parallel [DC]$ olacak şekilde $[EF]$ çizilir.

İç ters açılardan $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{DEF}) = x$ ve $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{FEA}) = y$ denilsin.

AED üçgeninin iç açıları toplamından $2x + 2y = 180^\circ$ ise $x + y = 90^\circ$ olur. Bu durumda AED dik üçgen ve $|DF| = |FE| = |FA|$ olur.

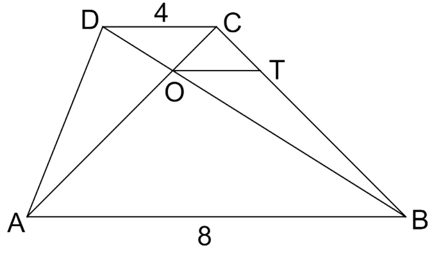
$|DF| = |FA| = \dfrac{|AD|}{2} = 6$ cm olacağından $|FE| = 6$ cm olur.

$[EF] \parallel [DC] \parallel [AB]$ ve $|DF| = |FA|$ olduğundan $[EF]$ orta taban olur.

Bu durumda $|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} \Rightarrow 6 = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} \Rightarrow |AB| + |DC| = 12$ cm bulunur.



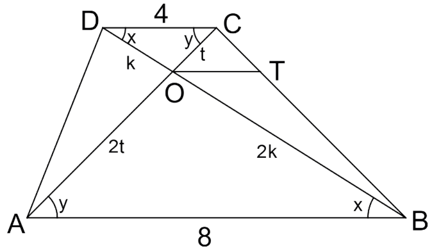
Örnek 4



Yandaki şekilde A, O, C ve D, O, B noktaları doğrusal, $[AC]\cap[DB]=\{O\}$, $[DC]\parallel[OT]\parallel[AB]$, $|DC|=4$ cm ve $|AB|=8$ cm ise $|OT|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



İç ters açılardan $m(\widehat{CDB})=m(\widehat{DBA})=x$ ve $m(\widehat{DCA})=m(\widehat{CAB})=y$ denilsin. Bu durumda A.A. benzerliği ile $\widehat{ODC}\sim\widehat{OBA}$ olur.

$$\frac{|OD|}{|OB|}=\frac{|OC|}{|OA|}=\frac{|DC|}{|BA|}\Rightarrow\frac{|OD|}{|OB|}=\frac{|OC|}{|OA|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

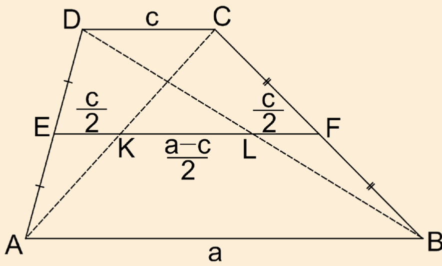
$\Rightarrow |OD|=k,\ |OB|=2k,\ |OC|=t,\ |OA|=2t$ yazılabilir.

A.A. benzerliği ile $\widehat{COT}\sim\widehat{CAB}$ olduğundan

$$\frac{|CO|}{|CA|}=\frac{|OT|}{|AB|}\Rightarrow\frac{t}{3t}=\frac{|OT|}{8}\Rightarrow|OT|=\frac{8}{3}\text{ cm olur.}$$

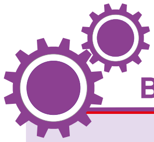


İpucu

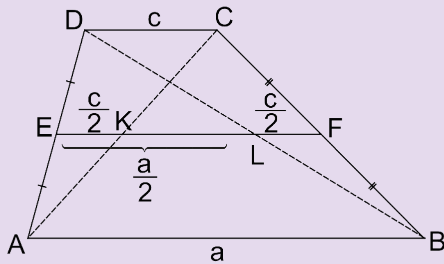


Şekildeki ABCD yamuğunda $[DC]\parallel[AB]$ olmak üzere $[DB]$ ile $[AC]$ na **yamuğun köşegenleri** denir. Köşegenlerin orta taban üzerinde ayırdığı doğru parçaları için $|EK|=|LF|=\frac{c}{2}$ ve $|KL|=\frac{a-c}{2}$ olur.

Bu ifadelerin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



- $\widehat{BDC}$ nin orta tabanı $[LF]$ olduğundan $|LF|=\frac{c}{2}$ olur.
- $\widehat{ADC}$ nin orta tabanı $[EK]$ olduğundan $|EK|=\frac{c}{2}$ olur.
- $\widehat{DAB}$ nin orta tabanı $[EL]$ olduğundan $|EL|=\frac{a}{2}$ olur.

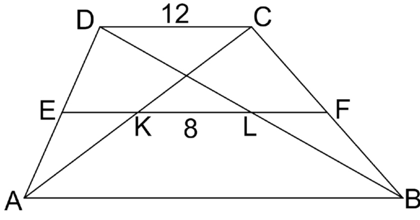
Bu durumda

$$|EL|=|EK|+|KL|\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{c}{2}+|KL|$$

$$\Rightarrow|KL|=\frac{a-c}{2}\text{ olur.}$$



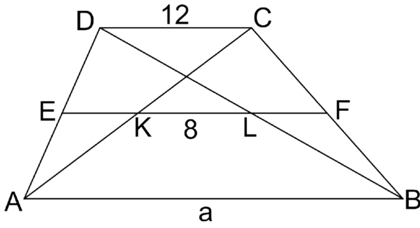
Örnek 5



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AC] ve [BD] köşegenlerdir. [EF] orta taban ve [DC] ∥ [AB], |KL| = 8 cm ve |DC| = 12 cm olduğuna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



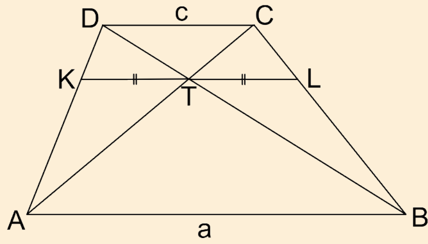
|AB| = a cm denilirse

$|KL| = \frac{|AB| - |DC|}{2} \Rightarrow 8 = \frac{a-12}{2} \Rightarrow 16 = a - 12 \Rightarrow a = 28$ olur.

Bu durumda |AB| = 28 cm olarak bulunur.



İpucu

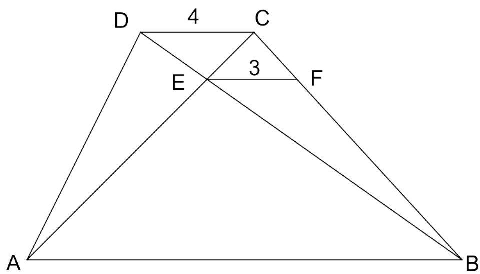


ABCD yamuğunda [DC] ∥ [AB], [DB] ∩ [CA] = {T} olmak üzere köşegenlerin kesim noktasından geçen ve alt taban ile üst tabana paralel olan [KL] için

$|KT| = |TL| = \frac{a \cdot c}{a + c}$ olur.



Örnek 6



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [DC] ∥ [EF] ∥ [AB], [DB] ∩ [CA] = {E} olmak üzere |EF| = 3 cm ve |DC| = 4 cm olduğuna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

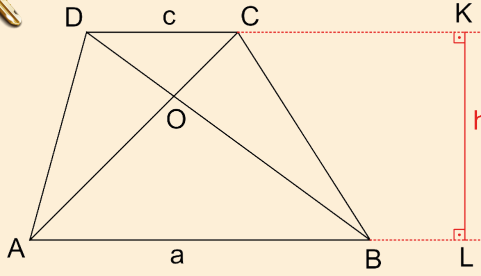


Çözüm

$|EF| = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AB| + |DC|} \Rightarrow 3 = \frac{|AB| \cdot 4}{|AB| + 4} \Rightarrow 3 \cdot |AB| + 12 = 4 \cdot |AB| \Rightarrow |AB| = 12$ cm olur.



İpucu



$[DC] \parallel [AB]$ olan ABCD yamuğunda $[KL] \perp AB$ ve $|KL| = h$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır.

$$A(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

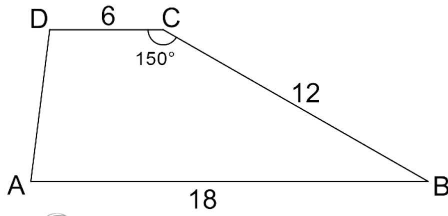


Buluyorum

$$A(ABCD) = A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{ADC}) = \frac{|AB| \cdot |KL|}{2} + \frac{|DC| \cdot |KL|}{2} = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |KL| = \frac{a+c}{2} \cdot h \text{ olur.}$$



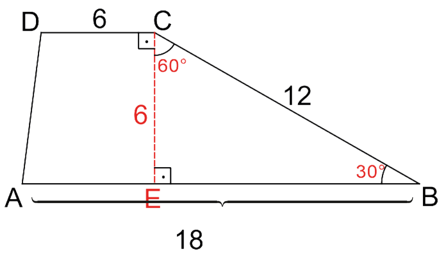
Örnek 7



Yandaki şekilde $[DC] \parallel [AB]$; $m(\widehat{DCB}) = 150°$; $|DC| = 6$ cm, $|CB| = 12$ cm ve $|AB| = 18$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



$m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{CBA}) = 180°$

$150° + m(\widehat{CBA}) = 180°$

$m(\widehat{CBA}) = 30°$ olur.

$[CE] \perp [AB]$ olacak şekilde $[CE]$ çizilir.
Oluşan CEB $30° - 60° - 90°$ dik üçgeni olduğundan $|CE| = 6$ cm olur. Bu durumda

$$A(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |CE| = \frac{18+6}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

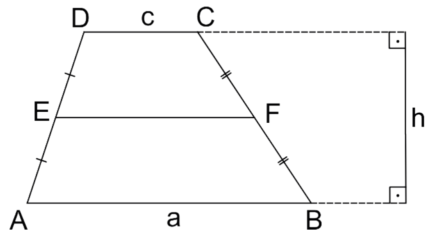


Örnek 8

Bir yamuğun alanının, orta taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu gösteriniz.

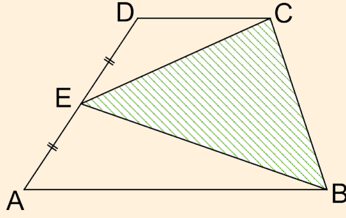


Çözüm



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $|EF| = \frac{a+c}{2}$ şeklindedir. Bu durumda $A(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h = |EF| \cdot h$ olur.

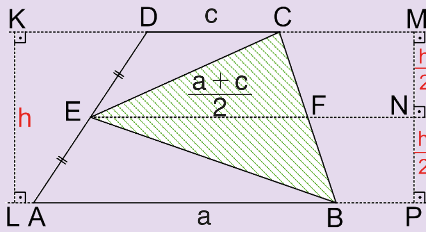
İpucu



Şekildeki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$ ve E noktası $[DA]$ nın orta noktası ise $A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{EBC})$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Buluyorum



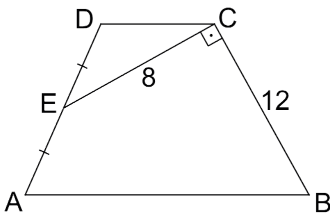
Yandaki şekilde $[EF] \parallel [DC]$ olacak şekilde çizilen $[EF]$ ABCD yamuğunun orta tabanı olsun. ABCD yamuğunun yüksekliğine $|KL| = h$ denilirse $|MN| = |NP| = \frac{h}{2}$ olur.

$A(\widehat{ECF}) = A(\widehat{EFB}) = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot \frac{h}{2}$ olduğundan

$A(\widehat{ECB}) = A(\widehat{ECF}) + A(\widehat{EFB}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot \frac{h}{2} = |EF| \cdot \frac{h}{2} = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{h}{2}$

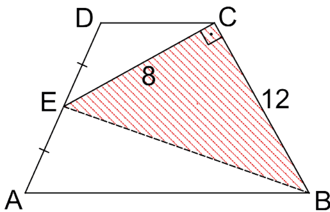
$A(\widehat{ECB}) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{a+c}{2} \cdot h) = \frac{1}{2} \cdot A(ABCD) \Rightarrow 2 \cdot A(\widehat{ECB}) = A(ABCD)$ bulunur.

Örnek 9



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[EC] \perp [BC]$; $[DC] \parallel [AB]$; $|DE| = |EA|$; $|EC| = 8$ cm, $|CB| = 12$ cm olduğuna göre A(ABCD) değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

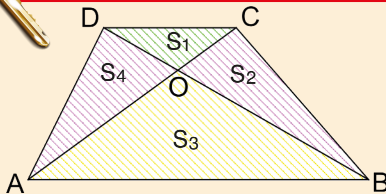


Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[EB]$ çizilerek $\widehat{EBC}$ oluşturulur ve

$A(\widehat{EBC}) = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48\ cm^2$ olur.

$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{EBC}) = 2 \cdot 48 = 96\ cm^2$ bulunur.

İpucu



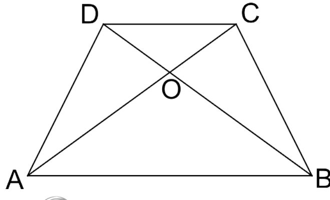
Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler ve $[DC] \parallel [AB]$ dir. $A(\widehat{DOC}) = S_1$, $A(\widehat{COB}) = S_2$, $A(\widehat{BOA}) = S_3$ ve $A(\widehat{AOD}) = S_4$ olsun.

$S_2 = S_4$

$S_2 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_3$ eşitlikleri geçerlidir.



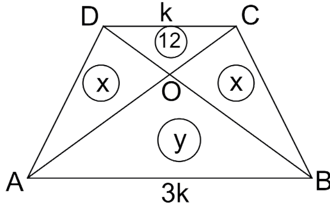
Örnek 10



Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler ve $[DC] \parallel [AB]$dir. $|AB| = 3 \cdot |DC|$ ve $A(\widehat{DOC}) = 12\ cm^2$ olduğuna göre A(ABCD) değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



$|DC| = k$ olsun. Buradan $|AB| = 3k$ olur.

A.A. benzerliği ile $\widehat{DOC} \sim \widehat{BOA}$ olur. Ayrıca $\frac{|DC|}{|BA|} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$ olduğundan benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olur. $A(\widehat{ADO}) = A(\widehat{BCO}) = x$ ve $A(\widehat{BOA}) = y$ olsun.

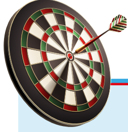
İki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$\frac{A(\widehat{DOC})}{A(\widehat{BOA})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{12}{y} = \frac{1}{9} \Rightarrow y = 108\ cm^2$ olur.

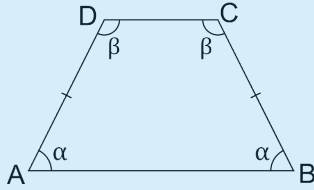
$x \cdot x = 12 \cdot y \Rightarrow x^2 = 12 \cdot 108 \Rightarrow x^2 = 1296 \Rightarrow x = 36$ olur.

Sonuç olarak $A(ABCD) = 2x + y + 12 = 2 \cdot 36 + 108 + 12 = 192\ cm^2$ bulunur.

İkizkenar Yamuk



Bilgi

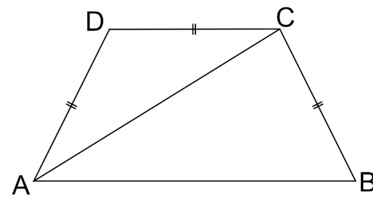


Yandaki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AD| = |BC|$ ise bu yamuğa **ikizkenar yamuk** denir.

- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C}) = \beta$ olur.



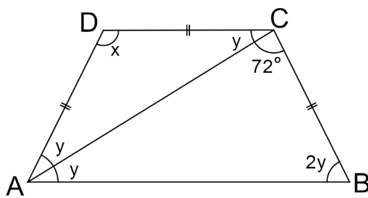
Örnek 11



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $|AD| = |DC| = |CB|$ ve $m(\widehat{ACB}) = 72^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CDA})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



$m(\widehat{CDA}) = x$ ve ADC ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = y$ denilirse iç ters açılardan $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB}) = y$ olur.

İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri eşit olduğundan $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBA}) = 2y$ olur. ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı ile $y + 2y + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3y = 108^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$ olur.

CDA üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı ile

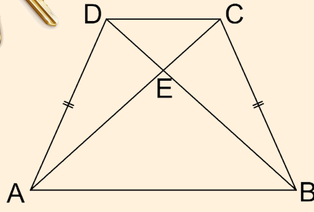
$2y + x = 180^\circ$

$2 \cdot 36^\circ + x = 180^\circ$

$72^\circ + x = 180^\circ$ ve $x = 108^\circ$ olur.



İpucu

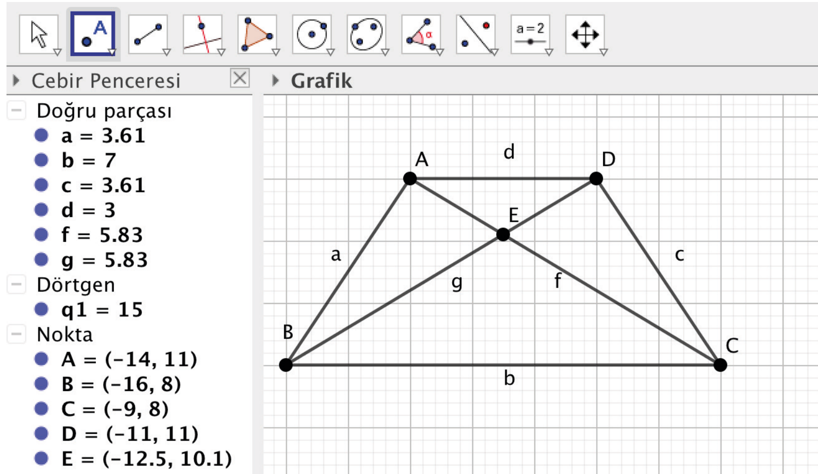


Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda [AC] ve [BD] köşegenler ve [DC] ⫽ [AB] dir. |AD| = |BC| ise

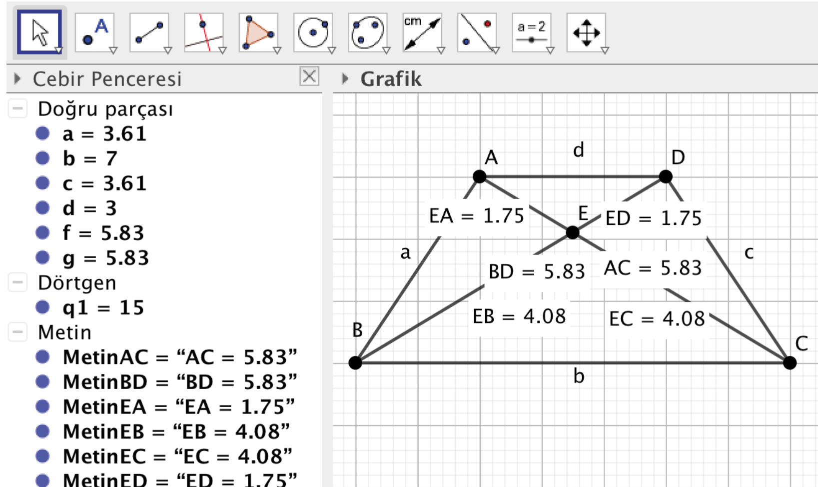
- |AC| = |DB| olur (Yani köşegen uzunlukları eşittir.).
- |ED| = |EC| olur.
- |EB| = |EA| olur.

Bu eşitliklerin doğruluğu GeoGebra programı ile gösterilebilir.
GeoGebra programını açınız. Grafik penceresinde sağ tıklayarak 'Grid' sekmesini seçiniz. Ardından araç çubuğundaki 5.kutuya tıklayınız. Açılan pencerede 'Çokgen' sekmesini seçiniz ve köşe koordinatları A(−14,11), B(−16,8), C(−9,8), D(−11,11) olan ABCD ikizkenar yamuğunu çiziniz (İkizkenar yamuk olacak şekilde başka noktalar seçebilirsiniz.).

Araç çubuğundaki 3. kutuya ve ardından açılan 'Doğru parçası' sekmesine tıklayınız. Daha sonra A ile C ve B ile D noktalarını birleştirerek [AC] ile [BD] köşegenlerini oluşturunuz. Araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından açılan 'Nokta' sekmesini seçerek [AC] ile [BD] köşegenlerinin kesim noktasına tıklayınız. [AC] ∩ [BD] = {E} olduğunu göreceksiniz.



Araç çubuğundaki 8. kutuya ve ardından açılan pencerede 'Uzaklık veya uzunluk' sekmesine tıklayınız. Daha sonra sırasıyla: A ile C noktalarına tıklayarak |AC| nu, B ile D noktalarına tıklayarak |BD| nu, E ile A noktalarına tıklayarak |EA| nu, E ile D noktalarına tıklayarak |ED| nu, E ile C noktalarına tıklayarak |EC| nu, E ile B noktalarına tıklayarak |EB| nu ölçünüz.
Cebir penceresinde |AC| = |BD|, |EA| = |ED|, |EB| = |EC| olduğunu göreceksiniz.





Örnek 12

Motor kaputu üreten bir firma aşağıda verilen maddelere göre üretim yapacaktır.

I. Firma dikdörtgen şeklinde metal levhaları keserek her bir levhadan ikizkenar yamuk şeklinde kaputlar yapacaktır.

II. Dikdörtgen levhaların ölçüleri 180 cm ve 120 cm dir.

III. Kaputun eşit kenarlarının uzunluğu 130 cm ve tabanlarından biri 180 cm olacaktır.

Buna göre

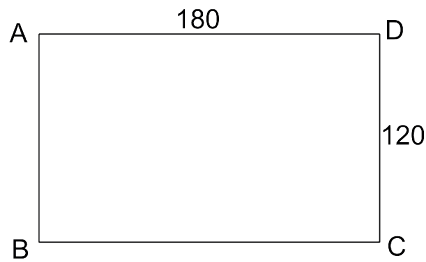
a) Kaputun çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

b) Kaputun alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

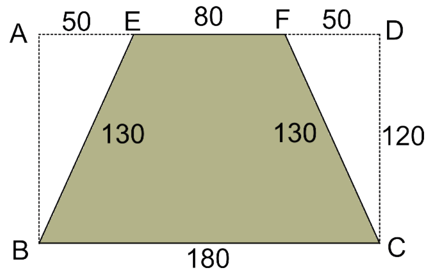


Çözüm

Kaputun üretileceği dikdörtgen levhalar aşağıdaki ABCD dörtgeni gibidir.



İkizkenar yamuk şeklindeki kaputun eşit kenarları 130 cm ve tabanlardan biri 180 cm olacağından kesim aşağıdaki gibi yapılabilir.



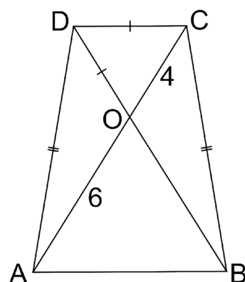
Kaputun eşit kenarları $|EB| = |FC| = 130$ cm olduğundan FDC dik üçgeninde Pisagor teoremi ile $|DF|^2 + |DC|^2 = |FC|^2 \Rightarrow |DF|^2 + 120^2 = 130^2 \Rightarrow |DF| = 50$ cm olur. Benzer şekilde $|AE| = 50$ cm bulunur.

a) Yamuğun çevresi $Ç(EBCF) = |EB| + |BC| + |CF| + |FE| = 130 + 180 + 130 + 80 = 520$ cm bulunur.

b) Yamuğun alanı $A(EBCF) = \frac{(|BC| + |EF|) \cdot |CD|}{2} = \frac{(180 + 80) \cdot 120}{2} = 15\,600 \text{ cm}^2 = 1{,}56 \text{ m}^2$ olarak bulunur.

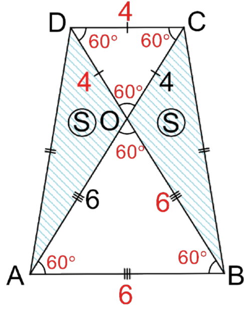


Örnek 13



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler ve $[DC] \parallel [AB]$; $|AD| = |BC|$, $|OD| = |DC|$; $|OC| = 4$ cm, $|OA| = 6$ cm olduğuna göre A(ABCD) değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

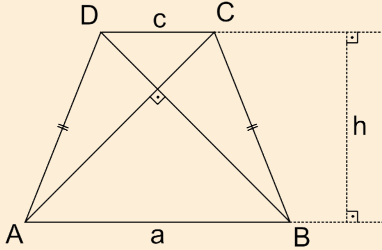
Çözüm



ABCD dörtgeni ikizkenar yamuk olduğundan $|OD| = |OC|$ elde edilir. Bu durumda $|OD| = |OC| = |DC|$ ve ODC eşkenar üçgen olur.
İç ters açılardan $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{DBA}) = 60°$, $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{CAB}) = 60°$ ve $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{BOA}) = 60°$ olur. Bu durumda OAB eşkenar üçgendir.
Bir kenar uzunluğu a cm olan eşkenar üçgenin alanı
$\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2 olduğundan
$A(\widehat{ODC}) = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm^2 ve $A(\widehat{OAB}) = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2 olur.
$A(\widehat{OAD}) = A(\widehat{OBC}) = S$ ise $S \cdot S = 4\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow S^2 = 108$ ve $S = 6\sqrt{3}$ cm^2 olur.

Sonuç olarak $A(ABCD) = A(\widehat{OAD}) + A(\widehat{OBC}) + A(\widehat{ODC}) + A(\widehat{OAB})$
$= 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$
$= 25\sqrt{3}$ cm^2 bulunur.

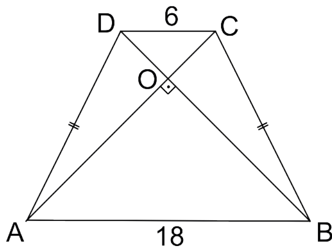
İpucu



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] /\!/ [DC]$, $|AD| = |BC|$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri dik kesişmekte ve h yamuğun yüksekliğidir. Buna göre

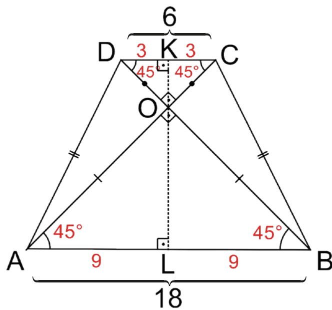
- $h = \frac{a+c}{2}$
- $A(ABCD) = h^2$ olur.

Örnek 14



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerdir. $[DC] /\!/ [AB]$, $[AC] \perp [DB]$, $|AD| = |CB|$, $|DC| = 6$ cm ve $|AB| = 18$ cm olduğuna göre A(ABCD) değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

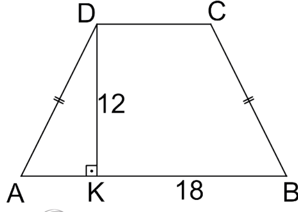
Çözüm



ABCD dörtgeni ikizkenar yamuk olduğundan $|DO| = |OC|$ ve $|AO| = |OB|$ olur. Bu durumda DOC ile BOA ikizkenar dik üçgendir.
O noktasından geçen ve $[DC]$ ile $[AB]$ na dik olan $[KL]$ çizilsin.
$[KO]$, $\widehat{DOC}$ nin bir kenarortayı olduğundan $|DK| = |KC| = |KO| = 3$ cm olur.
$[LO]$, $\widehat{BOA}$ nin bir kenarortayı olduğundan $|AL| = |LB| = |OL| = 9$ cm olur.
Bu durumda yamuğun yüksekliği $h = |KO| + |OL| = |KL| = 12$ cm olacağından
$A(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot h = \frac{18+6}{2} \cdot 12 = 12^2 = 144$ cm^2 bulunur.



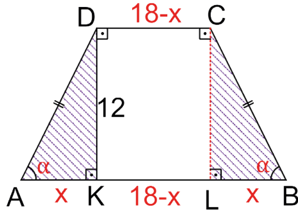
Örnek 15



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DK] \perp [AB]$, $|AD| = |CB|$, $|DK| = 12$ cm ve $|KB| = 18$ cm olduğuna göre A(ABCD) değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



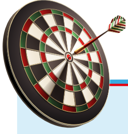
$[CL] \perp [AB]$ olacak şekilde $[CL]$ çizilir. Açılar şekildeki gibi yerleştirildikten sonra A.K.A. eşlik teoremi ile $\widehat{DAK} \cong \widehat{CBL}$ olur.

$\widehat{DAK} \cong \widehat{CBL}$ olduğundan $|AK| = |BL| = x$ denilirse $|KL| = 18 - x$ olur.

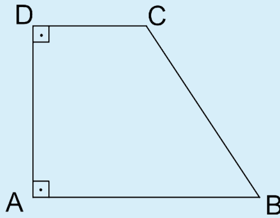
DKLC dörtgeninde karşılıklı kenarlar eşit olduğundan $|DC| = |KL| = 18 - x$ olur.

Bu durumda $A(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot h = \frac{18 + x + 18 - x}{2} \cdot 12 = 216 \text{ cm}^2$ bulunur.

Dik Yamuk



Bilgi

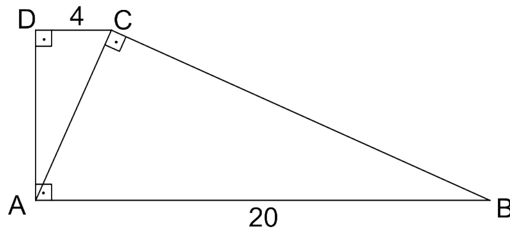


Herhangi bir köşesindeki açısının ölçüsü 90° olan yamuğa **dik yamuk** denir.

Yandaki ABCD yamuğunda $[AD]$ aynı zamanda bu yamuğun yüksekliğidir.



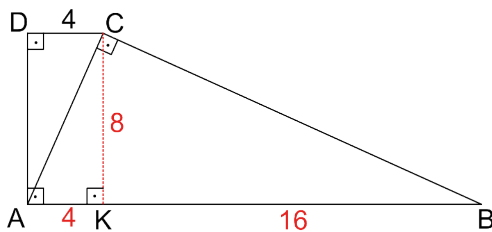
Örnek 16



Yandaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[AC] \perp [CB]$, $[AD] \perp [DC]$, $|DC| = 4$ cm ve $|AB| = 20$ cm olduğuna göre $|CB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[CK] \perp [AB]$ olacak şekilde $[CK]$ çizilir. AKCD dikdörtgeninde karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan $|AK| = 4$ cm ve buradan $|KB| = 16$ cm olur.

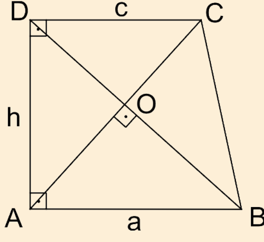
ACB üçgeninde Öklid teoremi ile

$|CK|^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow |CK|^2 = 64 \Rightarrow |CK| = 8$ cm olur. Bu durumda CKB dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|CB|^2 = |CK|^2 + |KB|^2 \Rightarrow |CB|^2 = 8^2 + 16^2 \Rightarrow |CB| = 8\sqrt{5}$ cm bulunur.



İpucu

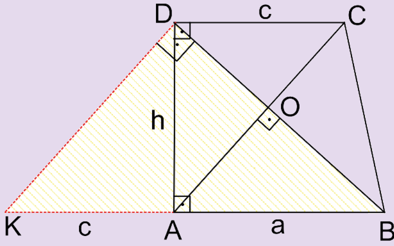


Yandaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DA] \perp [AB]$, $[AD] = h$ ve köşegenler birbirine dik ise $h^2 = a \cdot c$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



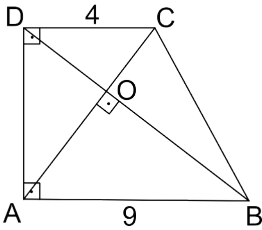
Buluyorum



$[AB]$ nın uzantısına $[DK] \parallel [CA]$ olacak şekilde $[DK]$ çizilir. Bu durumda yöndeş açılardan $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{KDB}) = 90°$ olur. DCAK dörtgeni paralelkenar olduğundan $|DC| = |KA| = c$ birim olur.
KDB dik üçgeninde Öklid teoremi kullanılarak $h^2 = a \cdot c$ elde edilir.



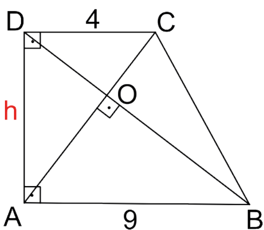
Örnek 17



Yandaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler olup $[DC] \parallel [AB]$; $[DA] \perp [AB]$, $[AC] \perp [DB]$; $|DC| = 4$ cm, $|AB| = 9$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

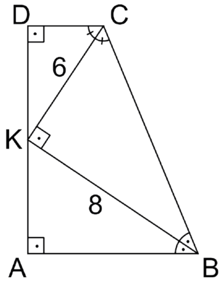


ABCD dik yamuğunda $[AD] = h$ olsun. Yamuğun köşegenleri birbirine dik olduğundan $h^2 = 9 \cdot 4 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$ cm olur.

$A(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot h = \frac{9+4}{2} \cdot 6 = 39$ cm^2 bulunur.



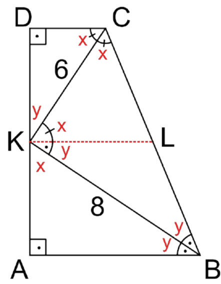
Örnek 18



Yandaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DA] \perp [AB]$, $|KC| = 6$ cm ve $|KB| = 8$ cm olur. $[CK]$ DCB açısının ve $[BK]$ CBA açısının açıortayları olduğuna göre $|DC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[KL] \parallel [DC]$ olacak şekilde $[KL]$ çizilsin.

$m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{LCK}) = x$ denilirse ters açılardan $m(\widehat{CKL}) = x$ olur.

$m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{LBK}) = y$ denilirse ters açılardan $m(\widehat{LKB}) = y$ olur.

KBC üçgeninin iç açıları toplamı ile $2x + 2y = 180° \Rightarrow x + y = 90°$ olur. Bu durumda KBC 6 cm - 8 cm - 10 cm dik üçgenidir ve açıları 90°, x ve y dir. O hâlde $m(\widehat{DKC}) = y$ ve $m(\widehat{AKB}) = x$ olur.

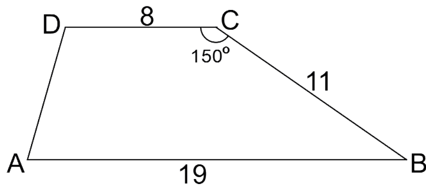
A.A. benzerlik teoremi ile $\widehat{KDC} \sim \widehat{BKC}$ olduğundan

$\frac{|KC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|KC|} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{|DC|}{6} \Rightarrow |DC| = 3,6$ cm bulunur.



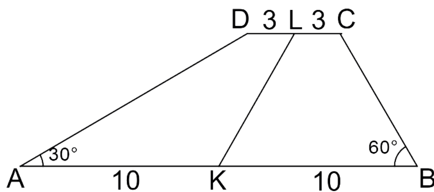
ALIŞTIRMALAR

1.



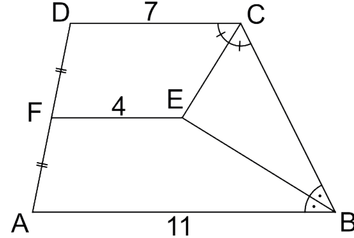
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$; $m(\widehat{DCB}) = 150°$; $|AB| = 19$ cm, $|BC| = 11$ cm ve $|CD| = 8$ cm olduğuna göre $m(\widehat{DAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



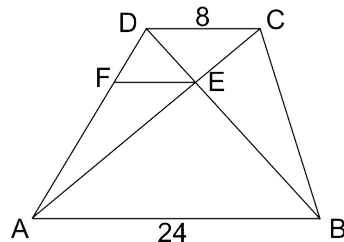
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$; $m(\widehat{DAB}) = 30°$, $m(\widehat{CBA}) = 60°$; $|DL| = |LC| = 3$ cm, $|AK| = |KB| = 10$ cm olduğuna göre $|KL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



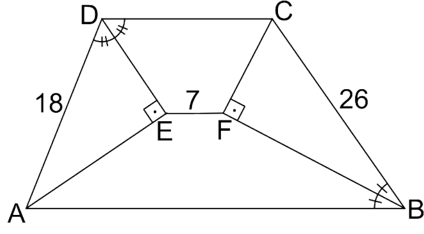
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[CE]$ DCB açısının, $[BE]$ CBA açısının açıortayı, $[DC] \parallel [AB]$; $|AF| = |FD|$; $|DC| = 7$ cm, $|AB| = 11$ cm, $|FE| = 4$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



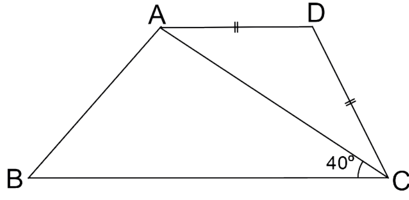
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[FE] \parallel [AB] \parallel [DC]$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen olmak üzere $|DC| = 8$ cm, $|AB| = 24$ cm olduğuna göre $|FE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



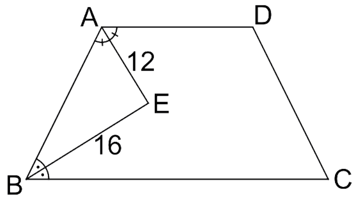
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DE]$ ve $[BF]$ açıortaylardır. $[AE] \perp [DE]$, $[BF] \perp [FC]$; $|AD| = 18$ cm, $|BC| = 26$ cm, $|EF| = 7$ cm olduğuna göre $|AB| + |DC|$ nın kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



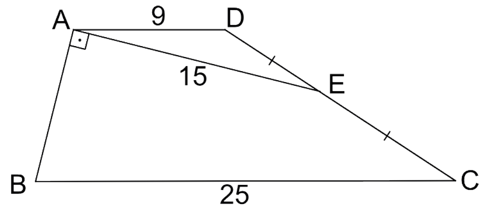
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AD] \parallel [BC]$, $|AD| = |DC|$ ve $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CDA})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

7.



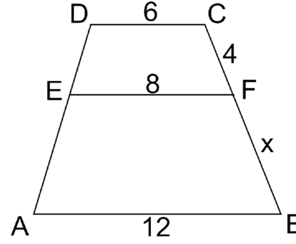
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AD] \parallel [BC]$; $|AE| = 12$ cm, $|BE| = 16$ cm; $[AE]$ ve $[BE]$ açıortaylar olduğuna göre ABCD yamuğunun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

8.



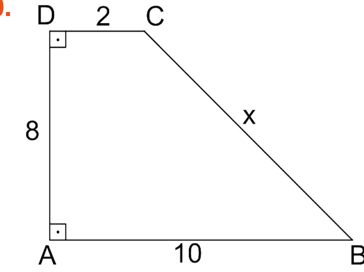
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AD] \parallel [BC]$; $|AD| = 9$ cm, $|AE| = 15$ cm, $|BC| = 25$ cm; $m(\widehat{BAE}) = 90^\circ$ ve $|DE| = |EC|$ olduğuna göre $|AB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

9.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $|DC| = 6$ cm, $|EF| = 8$ cm, $|AB| = 12$ cm, $|CF| = 4$ cm; $[DC] \parallel [EF] \parallel [AB]$ ve $|FB| = x$ olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

10.



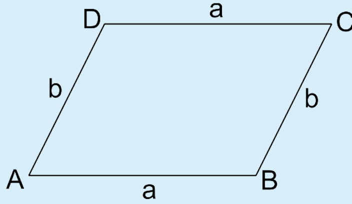
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$; $[AD] \perp [DC]$; $|AB| = 10$ cm, $|DC| = 2$ cm, $|AD| = 8$ cm ve $|BC| = x$ cm olduğuna göre x değerinin kaç olduğunu bulunuz.

Paralelkenar ve Özellikleri



Bilgi

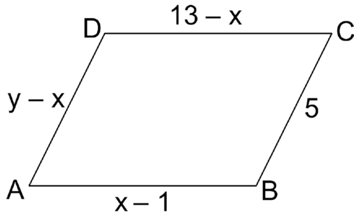
Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.



Yandaki ABCD paralelkenarında
- $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AB| = |DC| = a$ olur.
- $[AD] \parallel [BC]$ ve $|AD| = |BC| = b$ olur.



Örnek 19



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $|AD| = y - x$ cm, $|DC| = 13 - x$ cm, $|AB| = x - 1$ cm ve $|BC| = 5$ cm olduğuna göre $x + y$ toplamının değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

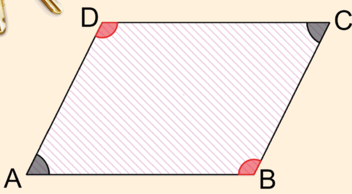
Paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan
$x - 1 = 13 - x \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ ve

$y - x = 5 \Rightarrow y - 7 = 5 \Rightarrow y = 12$ olur.

Bu durumda $x + y = 7 + 12 = 19$ cm olarak bulunur.



İpucu



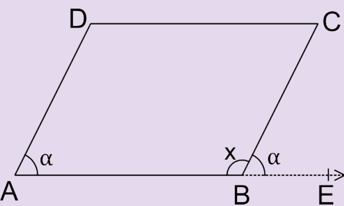
ABCD paralelkenar olmak üzere ardışık köşelerdeki iç açılar birbiriyle bütünler açı olup bu ardışık köşelerdeki iç açıların toplamı 180° dir.

ABCD paralelkenarında $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olur.

Bu ifadelerin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



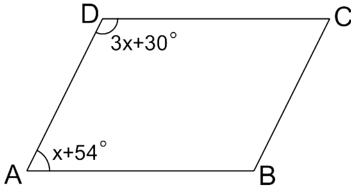
Buluyorum



B köşesi $[AE \parallel [DC]$ olacak şekilde uzatılsın. Yöndeş açılardan $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBE}) = \alpha$ olur. Bu durumda B köşesindeki açılar toplamı doğru açı kavramından $x + \alpha = 180^\circ$ olur. Ardışık köşeler olan A ile B köşelerindeki iç açılar birbiriyle bütünler açı olmuştur. Buradan D açısının bütünleri hem A açısı hem de C açısı olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ olur. Benzer şekilde A açısının bütünleri hem D açısı hem de B açısı olduğundan $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olur.



Örnek 20



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{ADC}) = 3x + 30^\circ$ ve $m(\widehat{DAB}) = x + 54^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DCB})$ ve $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

$\widehat{A}$ ile $\widehat{D}$ ardışık köşelerdeki açılar olduğundan

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ \Rightarrow x + 54^\circ + 3x + 30^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 4x + 84^\circ = 180^\circ$

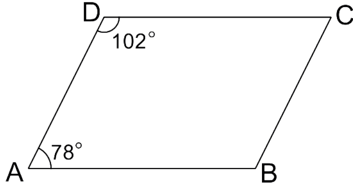
$\Rightarrow 4x = 96^\circ$

$\Rightarrow x = 24^\circ$ olur.

Buradan

$m(\widehat{A}) = x + 54^\circ = 24^\circ + 54^\circ = 78^\circ$

$m(\widehat{D}) = 3x + 30^\circ = 3 \cdot 24^\circ + 30^\circ = 102^\circ$ bulunur.

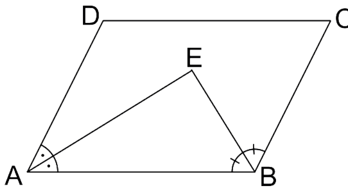


$\widehat{A}$ ile $\widehat{B}$ ardışık köşelerdeki açılar olduğundan $m(\widehat{B}) = 102^\circ$ olur.

$\widehat{D}$ ile $\widehat{C}$ ardışık köşelerdeki açılar olduğundan $m(\widehat{C}) = 78^\circ$ olur.



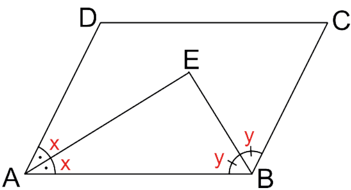
Örnek 21



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında [AE] ve [BE] bulundukları köşelerin açıortayları olduğuna göre $m(\widehat{AEB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



A ve B köşelerine ait açılar şekildeki gibi yazılırsa

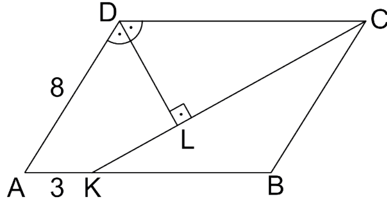
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$ olur.

$\overset{\frown}{ABE}$ nin iç açıları ölçülerinin toplamı 180° olduğundan

$x + y + m(\widehat{AEB}) = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + m(\widehat{AEB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$ olur.



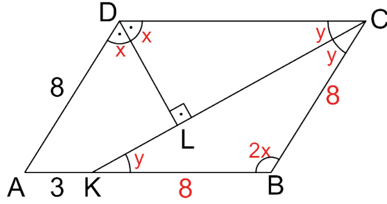
Örnek 22



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında K, L, C noktaları doğrusal ve $[DL]$, D köşesindeki iç açının açıortayıdır.
$|AD| = 8$ cm, $|AK| = 3$ cm; $[DL] \perp [CK]$ olduğuna göre $|DC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

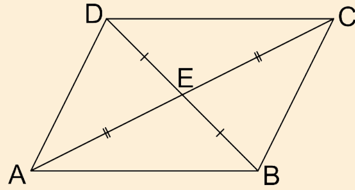


$m(\widehat{CDL}) = m(\widehat{ADL}) = x$ olsun. Bu durumda paralelkenarda karşılıklı kenarların açıları eşit olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 2x$ olur. $m(\widehat{KCB}) = m(\widehat{DCK}) = y$ olsun. İç ters açıların özelliğinden $m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{CKB}) = y$ olur. $\widehat{DLC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı ile $x + y + 90^\circ = 180^\circ$ olduğundan $x + y = 90^\circ$ olur. Bu durumda $\widehat{KBC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olması için $m(\widehat{KCB}) = y$ olur.

Paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan $|AD| = |BC| = 8$ cm olur. KBC ikizkenar üçgen olduğu için $|KB| = |BC| = 8$ cm bulunur. Sonuç olarak $|AB| = 8 + 3 = 11$ cm olur.



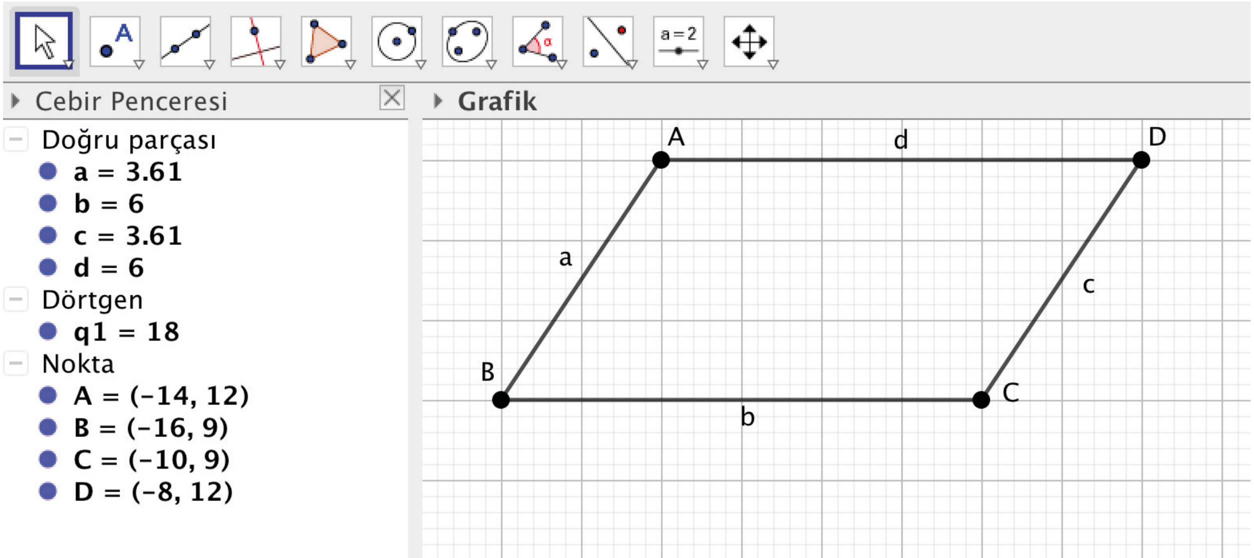
İpucu



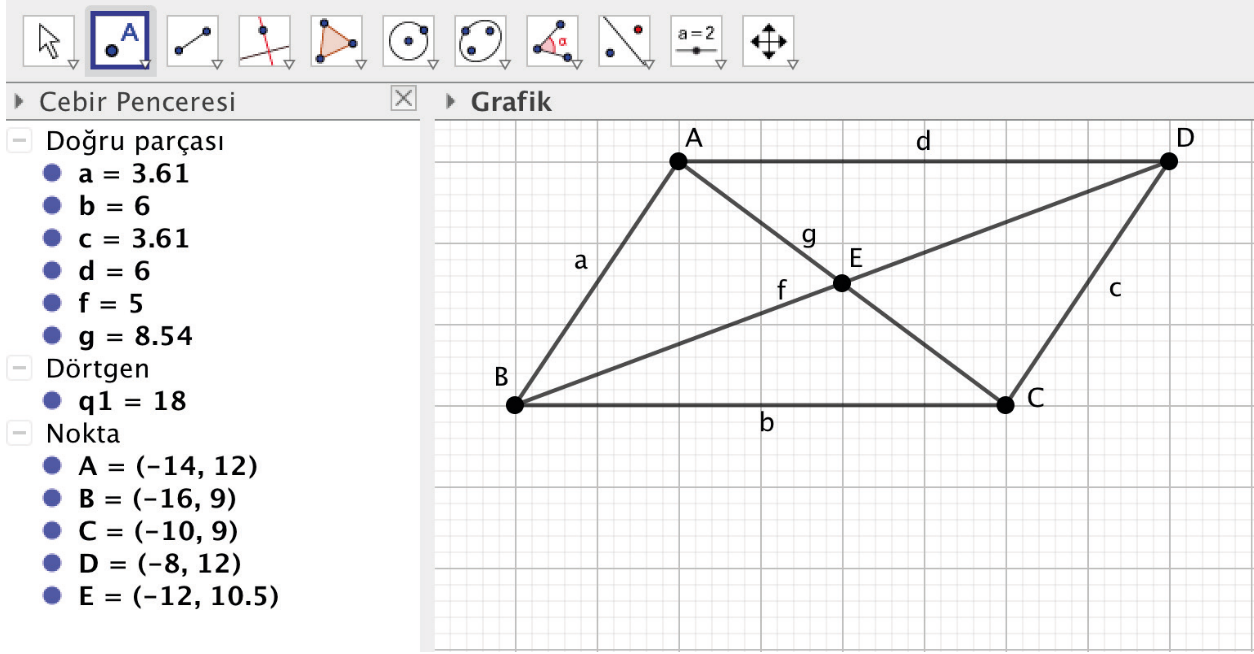
Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar. Şekildeki ABCD paralelkenarında $|DE| = |EB|$ ve $|AE| = |EC|$ olur.

Bu durumun GeoGebra ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

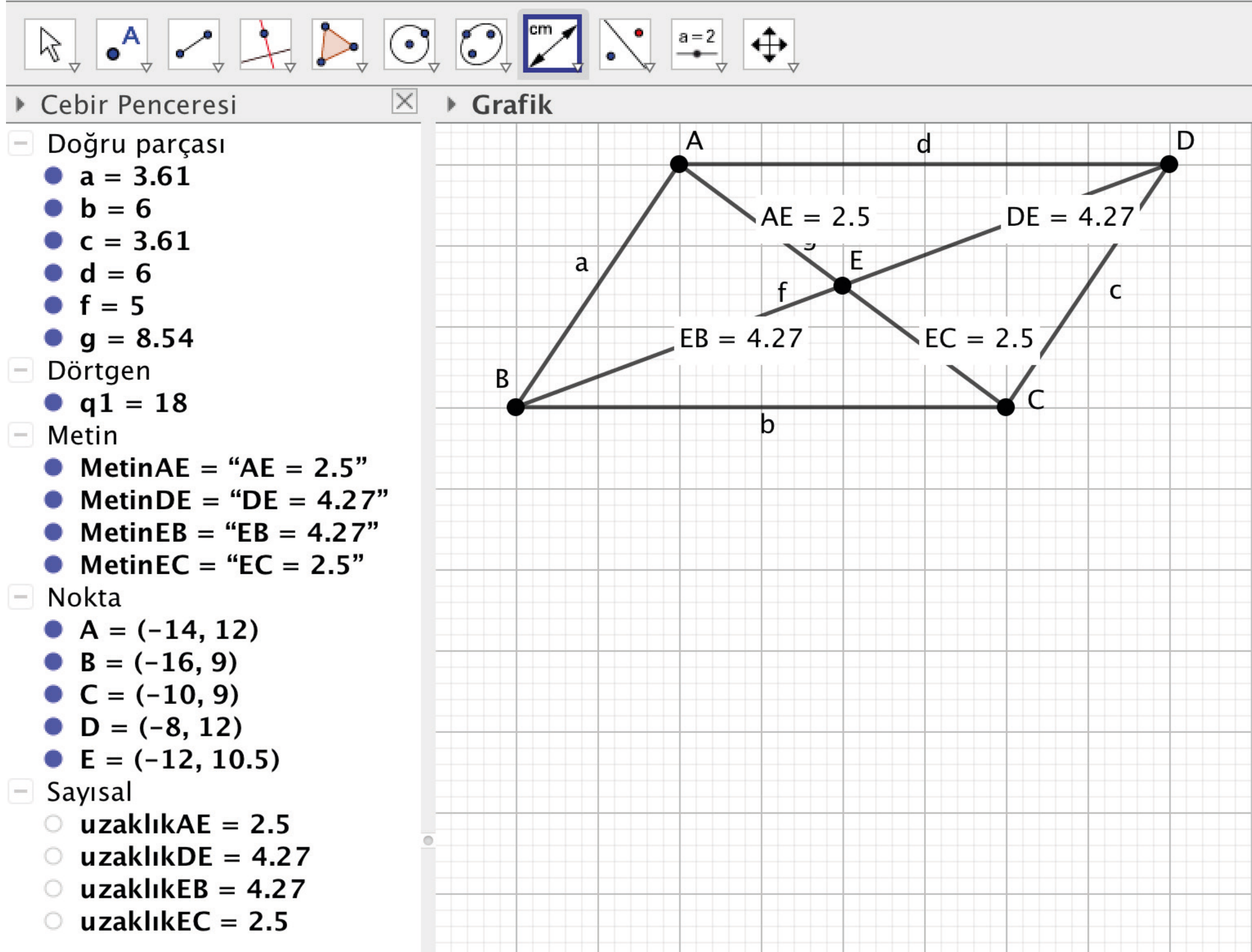
GeoGebra programını açarak grafik penceresinde sağ tıklayınız ve ‘Grid’ sekmesini seçiniz. Araç çubuğundaki 5. kutuyu ve ardından açılan ‘Çokgen’ sekmesini seçerek bir paralelkenar çiziniz.



Araç çubuğundaki 3. kutuyu ve ardından açılan ‘Doğru parçası’ sekmesini seçiniz. Daha sonra A ve C noktaları ile $[AC]$ köşegenini, B ve D noktaları ile BD köşegenini çiziniz. Araç çubuğundaki 2. kutuyu ve ardından açılan ‘Nokta’ sekmesini seçerek bu köşegenlerin kesim noktasına tıklayınız. Bu noktanın şekil üzerinde E olduğunu göreceksiniz.

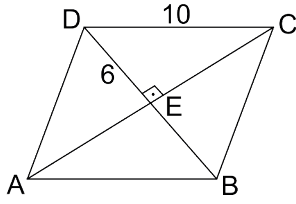


Araç çubuğundaki 8. kutuyu ve ardından açılan 'Uzaklık veya uzunluk' sekmesini seçiniz. Sırasıyla
D ile E noktalarına tıklayarak |DE| nu,
E ile B noktalarına tıklayarak |EB| nu,
A ile E noktalarına tıklayarak |AE| nu,
E ile C noktalarına tıklayarak |EC| nu ölçünüz.
Grafik penceresinde |DE|=|EB| ve |AE|=|EC| olduğunu göreceksiniz.





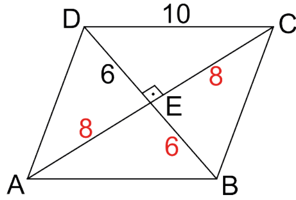
Örnek 23



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında [AC] ve [BD] köşegen olup köşegenler birbirine diktir. $|DC| = 10$ cm ve $|DE| = 6$ cm olduğuna göre $|AC| + |BD|$ toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.



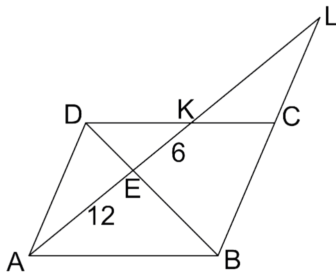
Çözüm



DEC dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile $|EC| = 8$ cm olur. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından $|AE| = |EC| = 8$ cm ve $|DE| = |EB| = 6$ cm olur. Bu durumda $|AC| + |BD| = 16 + 12 = 28$ cm olarak bulunur.



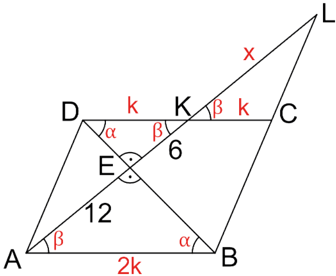
Örnek 24



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında A, E, K, L ve B, C, L noktaları doğrusal olup [DB] köşegendir. $|AE| = 12$ cm ve $|EK| = 6$ cm olduğuna göre $|KL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



Ters açılar ve iç ters açılar özelliği kullanılarak açılar şekildeki gibi yerleştirilirse A.A. benzerliği ile $\widehat{DKE} \sim \widehat{BAE}$ olur ve buradan $\frac{|DK|}{|BA|} = \frac{|KE|}{|AE|} \Rightarrow \frac{|DK|}{|BA|} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{|DK|}{|BA|} = \frac{1}{2}$ bulunur. Bu durumda $|DK| = k$ ve $|BA| = 2k$ yazılabilir.

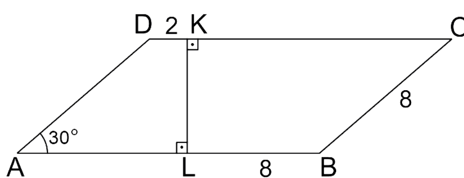
ABCD paralelkenarında $|AB| = |DC|$ olduğundan $|KC| = k$ olur.

A.A. benzerlik teoremi ile $\widehat{LKC} \sim \widehat{LAB}$ olduğundan

$\frac{|KC|}{|AB|} = \frac{|LK|}{|LA|} \Rightarrow \frac{k}{2k} = \frac{x}{x+18} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{x+18} \Rightarrow x + 18 = 2x \Rightarrow x = |KL| = 18$ cm olarak bulunur.

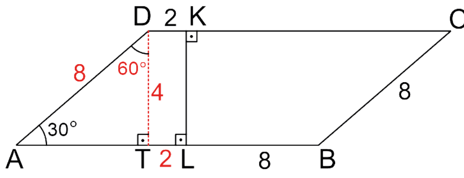


Örnek 25



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $[KL] \perp [DC]$ olmak üzere $|DK| = 2$ cm, $|BC| = |LB| = 8$ cm ve $m(\widehat{DAB}) = 30°$ olduğuna göre $|DC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

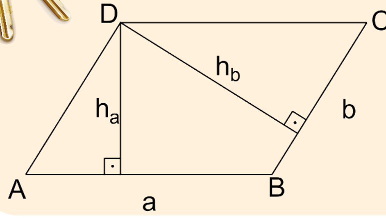


Paralelkenarın karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan $|BC| = |AD| = 8$ cm olur.
$[DT] \perp [AB]$ olacak şekilde $[DT]$ çizilirse DTA, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olur ve bu üçgen yardımıyla $|DT| = 4$ cm, $|AT| = 4\sqrt{3}$ cm bulunur.

DTLK dörtgeni dikdörtgendir ve $|DK| = |TL| = 2$ cm olur.
Buradan $|DC| = |AB| = 10 + 4\sqrt{3}$ cm olarak bulunur.

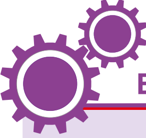


İpucu

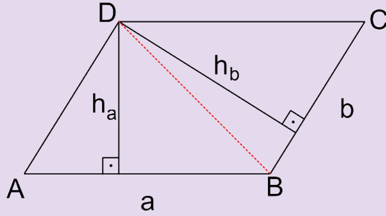


Bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımı paralelkenarın alanını verir.
Şekildeki ABCD paralelkenarının alanı $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



Herhangi bir köşegen paralelkenarı iki eş üçgene ayırdığından $\overset{\frown}{ABD} \cong \overset{\frown}{CDB}$ olur. Bu durumda $A(\overset{\frown}{ABD}) = A(\overset{\frown}{CDB})$ olur.

$A(ABCD) = A(\overset{\frown}{ABD}) + A(\overset{\frown}{CDB})$

$= 2 \cdot A(\overset{\frown}{ABD})$ ($A(\overset{\frown}{CDB})$ yerine $A(\overset{\frown}{ABD})$ yazılmıştır.)

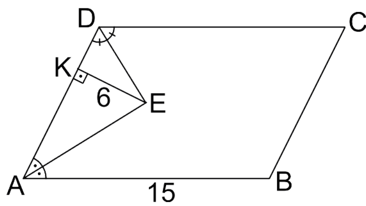
$= 2 \cdot \dfrac{a \cdot h_a}{2}$

$= a \cdot h_a$ bulunur.

Siz de benzer şekilde $A(ABCD) = b \cdot h_b$ olduğunu gösteriniz.



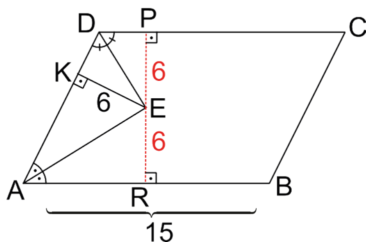
Örnek 26



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $[DE]$ ve $[AE]$ sırasıyla D ve A köşelerine ait açıortaylardır.
$[EK] \perp [DA]$; $|EK| = 6$ cm, $|AB| = 15$ cm olduğuna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



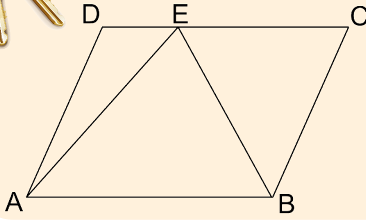
Çözüm



Açıortay doğrusu üzerinden açıortayın kolları üzerine indirilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan $|EK| = |EP| = |ER| = 6$ cm ve P, E, R noktaları doğrusaldır.
$[PR] \perp [AB]$ olduğundan $h_a = |PR| = 12$ cm olur. Bu durumda $A(ABCD) = a \cdot h_a = 15 \cdot 12 = 180$ cm^2 olur.



İpucu



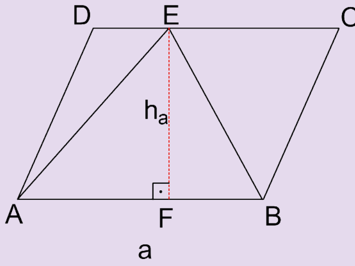
ABCD paralelkenarında $E \in [DC]$ ise

$A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{BCE}) = A(\widehat{ABE}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



ABCD paralelkenarında $[EF] \perp [DC]$ ve $[EF] \perp [AB]$ olacak şekilde $[EF]$ çizilir.

$A(\widehat{ABE}) = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur. Bu durumda

$$A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{BCE}) = \frac{|DE| \cdot h_a}{2} + \frac{|EC| \cdot h_a}{2}$$

$$= \frac{(|DE| + |EC|) \cdot h_a}{2}$$

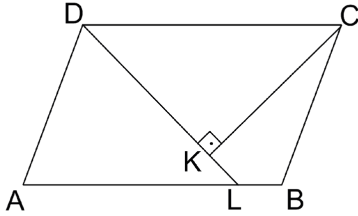
$$= \frac{|AB| \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$= \frac{A(ABCD)}{2}$$ bulunur.

Buradan $A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{BCE}) = A(\widehat{ABE})$ olur.



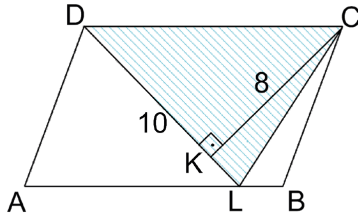
Örnek 27



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $[CK] \perp [DL]$, $|DL| = 10$ cm ve $|KC| = 8$ cm olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



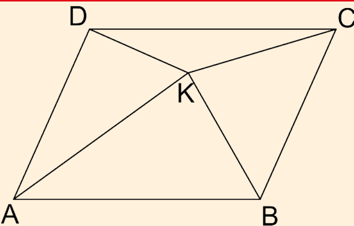
L ve C noktaları birleştirilerek $[LC]$ oluşturulursa

$\dfrac{A(ABCD)}{2} = A(\widehat{DLC}) \Rightarrow \dfrac{A(ABCD)}{2} = \dfrac{10 \cdot 8}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 80 \text{ cm}^2$

bulunur.



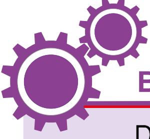
İpucu



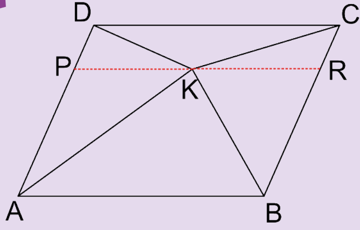
Yandaki şekilde verilen K noktası ABCD paralelkenarının iç bölgesinde bir nokta olmak üzere

$A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{BCK}) = A(\widehat{AKB}) + A(\widehat{DKC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



ABCD paralelkenarında $[PR] /\!/ [DC] /\!/ [AB]$ ve K noktasından geçecek şekilde $[PR]$ çizilirse DPRC ve ABRP dörtgenleri paralelkenar olur. Bu durumda

$A(\widehat{APK}) + A(\widehat{BKR}) = A(\widehat{ABK}) = \dfrac{A(ABRP)}{2}$ ... (I)

$A(\widehat{DPK}) + A(\widehat{CRK}) = A(\widehat{DKC}) = \dfrac{A(DPRC)}{2}$ ... (II)

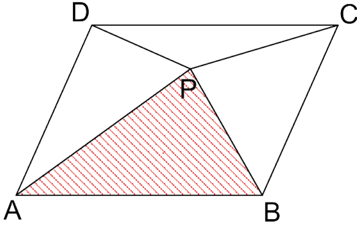
(I) ve (II) numaralı eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$A(\widehat{APK}) + A(\widehat{DPK}) + A(\widehat{BKR}) + A(\widehat{CRK}) = A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{DKC}) = \frac{A(ABRP)}{2} + \frac{A(DPRC)}{2}$$

$A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{BKC}) = A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{DKC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur.



Örnek 28



ABCD paralelkenarında P noktası iç bölgede bir nokta;
$A(\widehat{ADP}) = 24\ cm^2$, $A(\widehat{BCP}) = 30\ cm^2$ ve $A(\widehat{DCP}) = 15\ cm^2$ olduğuna göre ABP üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

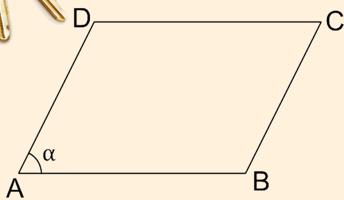
$A(\widehat{ABP}) + A(\widehat{DCP}) = A(\widehat{BCP}) + A(\widehat{ADP})$

$A(\widehat{ABP}) + 15 = 30 + 24$

$A(\widehat{ABP}) = 39\ cm^2$ bulunur.



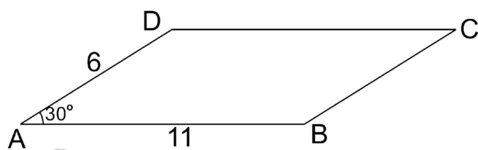
İpucu



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenar ve $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ ise
$A(ABCD) = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$ olur.



Örnek 29



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $|AD| = 6$ cm, $|AB| = 11$ cm ve $m(\widehat{DAB}) = 30^\circ$ olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

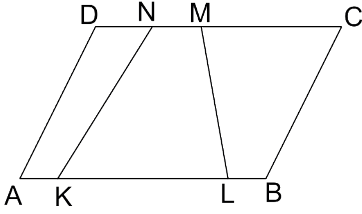


Çözüm

$A(ABCD) = |AD| \cdot |AB| \cdot \sin\alpha = 6 \cdot 11 \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot 11 \cdot \dfrac{1}{2} = 33\ cm^2$ olur.



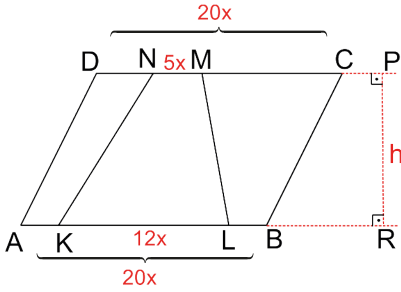
Örnek 30



Yandaki şekilde ABCD paralelkenar olmak üzere $|NM| = \frac{|DC|}{4}$, $|KL| = \frac{3 \cdot |AB|}{5}$ ve $A(ABCD) = 120\ cm^2$ olduğuna göre KLMN yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



$|NM| = \frac{|DC|}{4}$ ise $|DC| = 4k$ ve $|NM| = k$,

$|KL| = \frac{3 \cdot |AB|}{5}$ ise $|AB| = 5t$ ve $|KL| = 3t$ olarak alınırsa

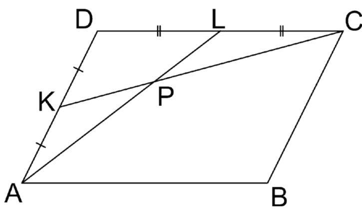
ABCD paralelkenarında $|AB| = |CD| \Rightarrow 5t = 4k \Rightarrow t = 4x,\ k = 5x$ yazılabilir. Bu durumda $|AB| = |CD| = 20x$, $|NM| = 5x$ ve $|KL| = 12x$ olur. $|PR| = h$ ise hem ABCD paralelkenarının hem de KLMN yamuğunun yüksekliğidir.

$A(ABCD) = 120 \Rightarrow 20x \cdot h = 120 \Rightarrow x \cdot h = 6$ olur.

$A(KLMN) = \frac{12x + 5x}{2} \cdot h = \frac{17x}{2} \cdot h = \frac{17 \cdot 6}{2} = 51\ cm^2$ bulunur.



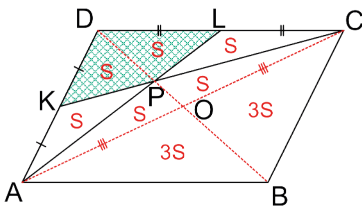
Örnek 31



Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenarının alanı $96\ cm^2$ dir. A, P, L ve K, P, C noktaları doğrusal, $|AK| = |KD|$ ve $|DL| = |LC|$ olduğuna göre DKPL dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



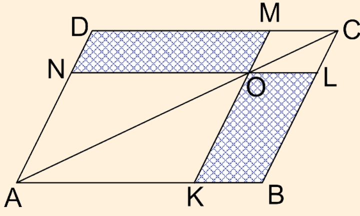
ABCD paralelkenarına [AC] köşegeni çizilir. [CK] ile [AL], $\widehat{ADC}$ nin kenarortayları olur. Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortaladığından $|AO| = |OC|$ olup P noktası ADC üçgeninin ağırlık merkezidir. Buradan [DB] köşegeni P noktasından geçer. ABC üçgeninde $|AO| = |OC|$ olduğundan $A(\widehat{ABO}) = A(\widehat{BOC})$ olur. $\widehat{ADC}$ nin tüm köşelerinden kenarortaylar çizildiğinden bu üçgenin alanı 6 eş parçaya ayrılmıştır.

[AC] köşegeni paralelkenarı eş alanlı iki parçaya ayırdığından $A(\widehat{ADC}) = A(\widehat{ABC})$ ve bu durumda alanlar şekildeki gibi olur.

$A(ABCD) = 96 \Rightarrow 12S = 96 \Rightarrow S = 8\ cm^2$ ve buradan $A(DKPL) = 2S = 2 \cdot 8 = 16\ cm^2$ bulunur.



İpucu

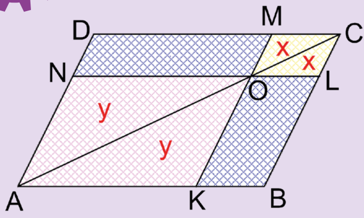


ABCD paralelkenarında $[AC]$ köşegen ve $[NL] \cap [MK] \cap [AC] = \{O\}$ olmak üzere $[NL] /\!/ [DC]$ ve $[MK] /\!/ [DA]$ ise $A(DNOM) = A(KBLO)$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



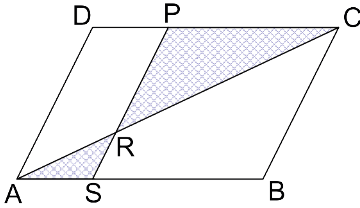
Buluyorum



Yanda verilenlere göre MOLC dörtgeni paralelkenardır ve $[OC]$ köşegen olduğundan $A(\widehat{MOC}) = A(\widehat{LCO}) = x$ denilebilir. Benzer şekilde AKON dörtgeni paralelkenardır ve $[AO]$ köşegen olduğundan $A(\widehat{AON}) = A(\widehat{OAK}) = y$ denilebilir. $[AC]$ köşegeni ABCD paralelkenarını eş alanlı iki bölgeye ayırdığından $A(DNOM) = A(KBLO)$ olur.



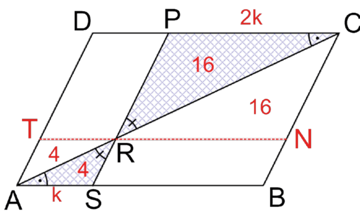
Örnek 32



Yandaki şekilde ABCD paralelkenar olmak üzere $[AC]$ köşegendir. $[AD] /\!/ [SP]$, $A(\widehat{ASR}) = 4\ cm^2$ ve $A(\widehat{PRC}) = 16\ cm^2$ olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

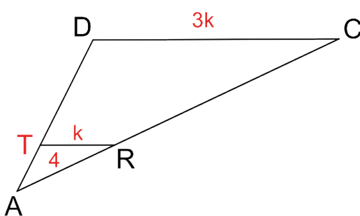


Çözüm



$[DC]$ na paralel ve R noktasından geçecek şekilde $[TN]$ çizilir. Bu durumda ASRT paralelkenarında $A(\widehat{ASR}) = A(\widehat{RTA}) = 4\ cm^2$ ve PRNC paralelkenarında $A(\widehat{PRC}) = A(\widehat{NCR}) = 16\ cm^2$ olur. A.A. benzerliği ile $\widehat{ASR} \sim \widehat{CPR}$ dir. Benzer üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$\frac{A(\widehat{ASR})}{A(\widehat{CPR})} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{16}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ yazılabilir. Bu durumda benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir. O hâlde $|AS| = k$, $|PC| = 2k$ yazılabilir. Buradan $|TR| = |DP| = k$ olur.



$\widehat{ADC}$ yandaki gibi çizilirse $[TR] /\!/ [DC]$ olduğundan $\widehat{ATR} \sim \widehat{ADC}$ dir ve benzerlik oranı $\frac{|TR|}{|DC|} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$ olur.

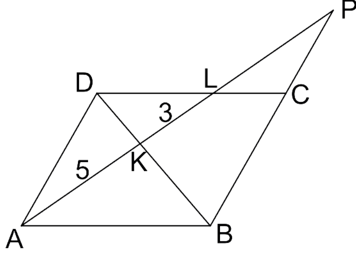
Alanları oranı ise $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ olduğundan $A(\widehat{ADC}) = 9 \cdot 4 = 36\ cm^2$ olur.

Sonuç olarak $A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ADC}) = 2 \cdot 36 = 72\ cm^2$ bulunur.



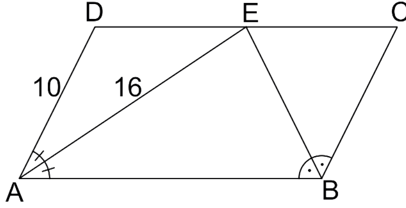
ALIŞTIRMALAR

1.



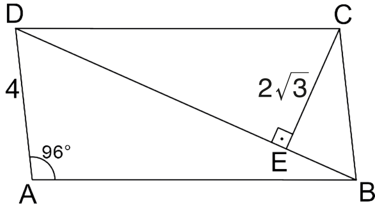
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında A, K, L, P ve B, C, P noktaları doğrusal ve [BD] köşegendir. $|AK| = 5$ cm ve $|KL| = 3$ cm olduğuna göre $|LP|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

2.



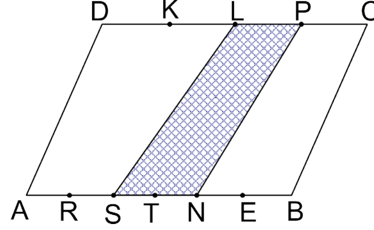
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında
$|AD| = 10$ cm, $|AE| = 16$ cm;
$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAE})$, $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{ABE})$
olduğuna göre ABCD paralelkenarının çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



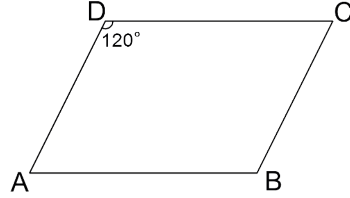
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında [BD] köşegendir. $|EC| = 2\sqrt{3}$ cm, $|AD| = 4$ cm; $[BD] \perp [EC]$ ve $m(\widehat{DAB}) = 96^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{EDC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



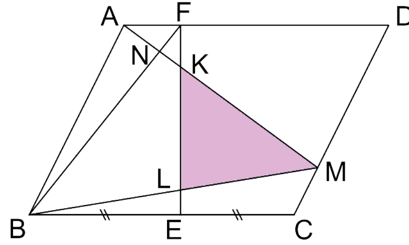
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında
$|DK| = |KL| = |LP| = |PC|$,
$|AR| = |RS| = |ST| = |TN| = |NE| = |EB|$
ve $A(SNPL) = 42$ cm^2 olduğuna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$ ve paralelkenarın alanı $12\,cm^2$ olduğuna göre $|AB| \cdot |AD|$ nun değerini bulunuz.

6.

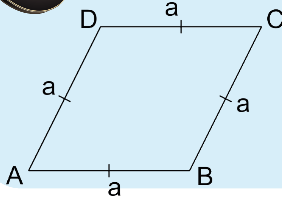


Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında A, N, K, M noktaları, B, L, M noktaları, B, N, F noktaları ve F, K, L, E noktaları doğrusaldır. $|BE| = |EC|$; $A(\widehat{ABN}) = 7$ cm^2, $A(\widehat{LBE}) = 4$ cm^2, $A(\widehat{FNK}) = 2$ cm^2 ve $A(ABCD) = 68$ cm^2 olduğuna göre KLM üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Eşkenar Dörtgen ve Özellikleri



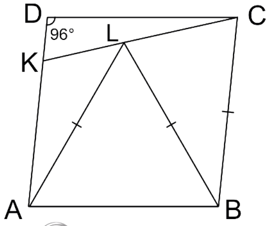
Bilgi



Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir. Eşkenar dörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır ve paralelkenarın özelliklerini taşır. Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgeninde $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ olur.



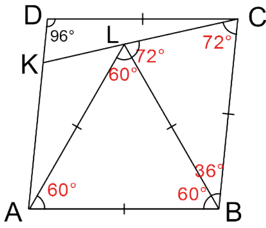
Örnek 33



Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgen ve K, L, C noktaları doğrusaldır. $|AL| = |LB| = |BC|$ ve $m(\widehat{ADC}) = 96^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{KLA})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



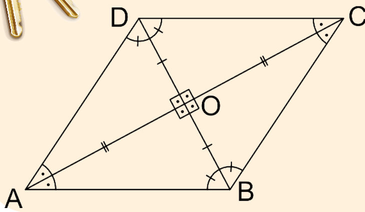
ABCD eşkenar dörtgeninde $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ olduğundan ABL eşkenar üçgendir. $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC}) = 96^\circ$ olduğundan $m(\widehat{LBC}) = 36^\circ$ olur. LBC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{BLC}) = m(\widehat{BCL}) = 72^\circ$ olur.
K, L, C noktaları doğrusal olduğundan

$$m(\widehat{KLA}) + m(\widehat{ALB}) + m(\widehat{BLC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{KLA}) + 60^\circ + 72^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{KLA}) = 48^\circ \text{ olarak bulunur.}$$



İpucu



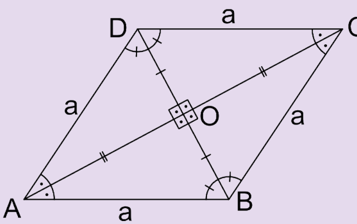
Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere
- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini dik keser.
- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini ortalar.
- [AC] ve [BD] köşegenleri aynı zamanda açıortaydır.

Bu ifadelerin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

ABCD eşkenar dörtgeni aynı zamanda paralelkenar olduğundan köşegenler birbirini ortalar.

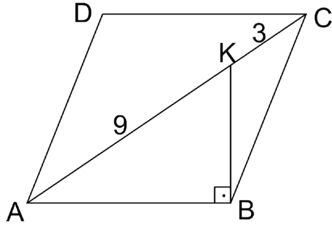


- ADC ile ABC ikizkenar üçgenlerinde sırasıyla [DO] ve [BO] kenarortay olduğundan $[DO] \perp [AC]$ ve $[BO] \perp [AC]$ olur. Buradan köşegenlerin birbirini dik kestiği sonucuna ulaşılır.

- ADC ve ABC ikizkenar üçgenlerinde sırayla [DO] ve [BO] hem yükseklik hem kenarortay olduğundan aynı zamanda açıortay olur. Benzer şekilde [AC] köşegeninin de açıortay olduğu sonucuna ulaşılır.



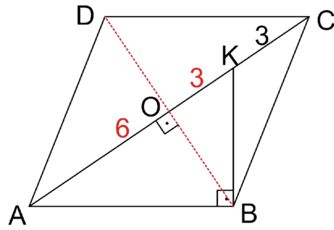
Örnek 34



Yandaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegendir. $|KC| = 3$ cm, $|AK| = 9$ cm ve $[KB] \perp [AB]$ ise $|KB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

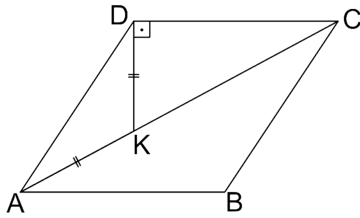


[BD] köşegeni çizilirse $[BD] \perp [AC]$ olur. Ayrıca köşegenler birbirini ortaladığından $|AO| = 6$ cm, $|OK| = 3$ cm olur. Köşegenlerin kesim noktasına O denilirse ABK dik üçgeninde Öklid teoremi ile

$$|KB|^2 = |KO| \cdot |KA|$$
$$= 3 \cdot (3+6) \Rightarrow |KB|^2 = 27$$
$$\Rightarrow |KB| = \sqrt{27}$$
$$\Rightarrow |KB| = 3\sqrt{3} \text{ cm bulunur.}$$



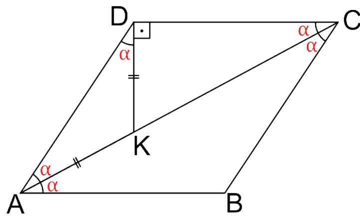
Örnek 35



Yandaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegendir. $|AK| = |DK|$ ve $[KD] \perp [DC]$ olduğuna göre $m(\widehat{DCB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm



Eşkenar dörtgende köşegenler aynı zamanda açıortay olduğundan $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCA}) = \alpha$ denilsin. AKD ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{ADK}) = \alpha$ olur.

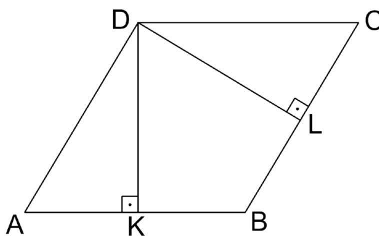
$\widehat{ADC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı ile

$3\alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ olur.

Sonuç olarak $m(\widehat{DCB}) = 2\alpha = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ olarak bulunur.



Örnek 36



Yandaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[DK] \perp [AB]$, $[DL] \perp [BC]$; $|DK| = (2x - 1)$ cm, $|DL| = (x + 3)$ cm ve eşkenar dörtgenin çevresinin uzunluğu 40 cm olduğuna göre eşkenar dörtgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

Eşkenar dörtgenin kenar uzunlukları eşit olduğundan kenar uzunluklarının her biri 10 cm olur. Eşkenar dörtgen paralelkenarın özelliklerini taşıdığından eşkenar dörtgenin alanı, bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yükseklik uzunluğunun çarpımı ile bulunabilir. Buradan

$|DK| \cdot |AB| = |DL| \cdot |BC|$

$(2x-1) \cdot 10 = (x+3) \cdot 10$

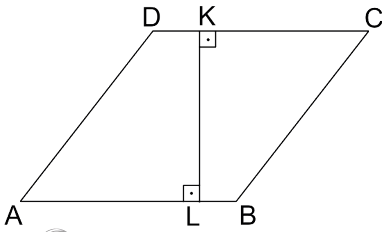
$2x - 1 = x + 3$

$x = 4$ cm olur.

$A(ABCD) = |DK| \cdot |AB| = (2x-1) \cdot 10 = (2 \cdot 4 - 1) \cdot 10 = 7 \cdot 10 = 70\ cm^2$ olarak bulunur.



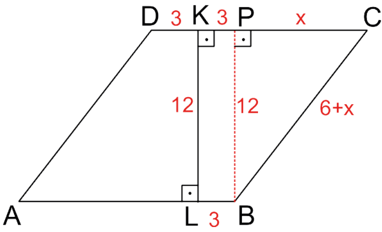
Örnek 37



Yandaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[KL] \perp [AB]$, $|DK| = |LB| = 3$ cm, $|KL| = 12$ cm olduğuna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[PB] \parallel [KL]$ olacak şekilde $[PB]$ çizilirse KLBP dikdörtgeninde $|KP| = |LB| = 3$ cm ve $|KL| = |PB| = 12$ cm olur.

$|PC| = x$ denilirse $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 6 + x$ olur.

PBC dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile

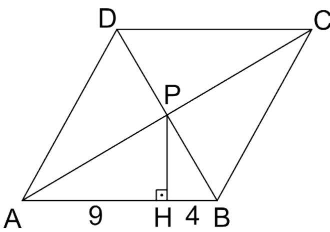
$(6+x)^2 = x^2 + 12^2 \Rightarrow 36 + 12x + x^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 12x = 108 \Rightarrow x = 9$

olur. Bu durumda $|AB| = 15$ cm olur.

$A(ABCD) = |AB| \cdot |KL| = 15 \cdot 12 = 180\ cm^2$ bulunur.



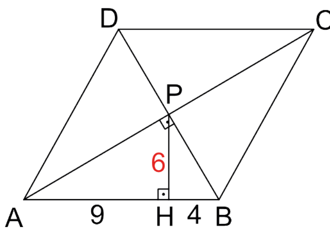
Örnek 38



Yandaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerdir. $[PH] \perp [AB]$; $|AH| = 9$ cm, $|HB| = 4$ cm olduğuna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



ABCD eşkenar dörtgen olduğundan $[AC] \perp [BD]$ ve buradan APB dik üçgen olur. Öklid teoremi ile

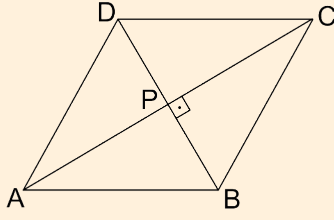
$|PH|^2 = |AH| \cdot |HB| \Rightarrow |PH|^2 = 9 \cdot 4 \Rightarrow |PH|^2 = 36 \Rightarrow |PH| = 6$ cm olur.

Bu durumda

$\frac{A(ABCD)}{4} = A(\widehat{ABP}) \Rightarrow \frac{A(ABCD)}{4} = \frac{13 \cdot 6}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 156\ cm^2$ bulunur.

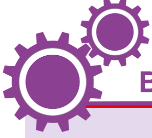


İpucu

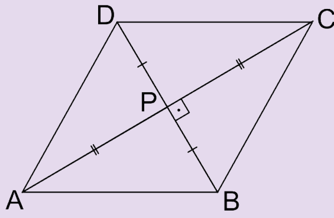


ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen olmak üzere $A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



$[BD]$ köşegeni ABCD eşkenar dörtgenini eş alanlı iki bölgeye ayırır. Buradan $A(\widehat{ABD}) = \frac{A(ABCD)}{2}$ olur.

$A(\widehat{ABD}) = \frac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow \frac{|BD| \cdot |AP|}{2} = \frac{A(ABCD)}{2}$

$\Rightarrow |BD| \cdot |AP| = A(ABCD)$

$\Rightarrow |BD| \cdot \frac{|AC|}{2} = A(ABCD)$ elde edilir ($|AP| = \frac{|AC|}{2}$ yazılır.).



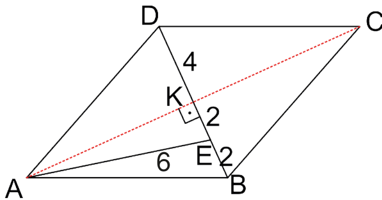
Örnek 39

ABCD eşkenar dörtgeninde $[DB]$ köşegeni üzerinde bulunan bir E noktası için $|DE| = 6$ cm, $|EB| = 2$ cm ve $|AE| = 6$ cm olduğuna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeni, $[DB]$ köşegeni ve $[AC]$ köşegeni aşağıdaki gibi çizilsin.
Köşegenlerin kesim noktasına K denilirse $[AC] \perp [DB]$, $|DK| = 4$ cm ve $|KE| = 2$ cm olur.
AKE dik üçgeninde Pisagor teoremi ile



$|AK|^2 + |KE|^2 = |AE|^2 \Rightarrow |AK|^2 + 2^2 = 6^2$

$\Rightarrow |AK|^2 + 4 = 36$

$\Rightarrow |AK|^2 = 32$

$\Rightarrow |AK| = 4\sqrt{2}$ cm olur.

Buradan $|AK| = |KC| = 4\sqrt{2}$ cm elde edilir ve $|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olur.

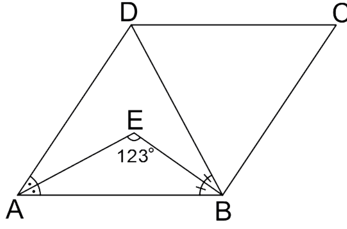
ABCD dörtgeni, eşkenar dörtgen olduğundan

$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 8}{2} = 32\sqrt{2}$ cm^2 bulunur.



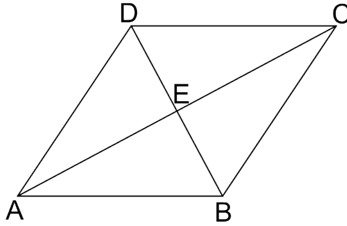
ALIŞTIRMALAR

1.



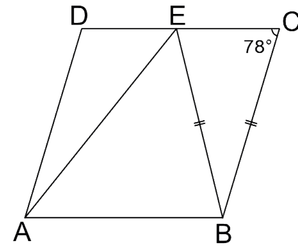
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [DB] köşegen, [AE], DAB açısının ve [BE], DBA açısının açıortayıdır. $m(\widehat{AEB}) = 123^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



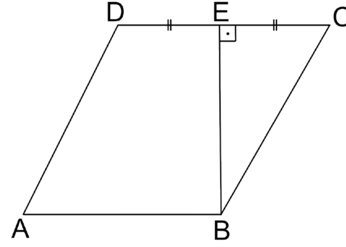
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegendir. $|BD| = 6$ cm ve $|AD| = 5$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



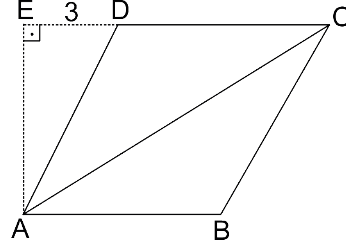
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|EB| = |BC|$ ve $m(\widehat{DCB}) = 78^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DAE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



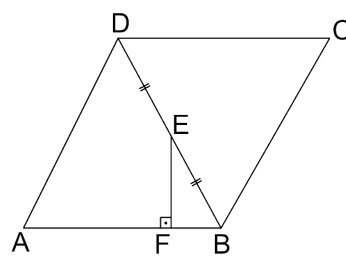
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[BE] \perp [DC]$ ve $|DE| = |EC|$ olduğuna göre $m(\widehat{DAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegendir. $[AE] \perp [EC]$, $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$, $|ED| = 3$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

6.

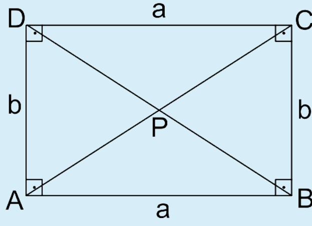


Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde [BD] köşegendir. $[EF] \perp [AB]$, $|DE| = |EB|$; $|FB| = 2$ cm, $|BC| = 10$ cm olduğuna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Dikdörtgen ve Özellikleri



Bilgi

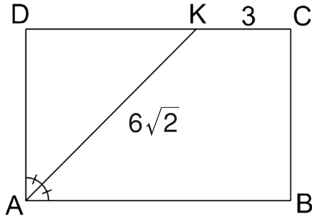


Açılarından biri 90° olan paralelkenara **dikdörtgen** denir. Dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır ve paralelkenarın özelliklerini taşır. Buna göre

- $|AB| = |DC|$ ve $|AD| = |BC|$
- $Ç(ABCD) = 2 \cdot (a + b)$ olur.



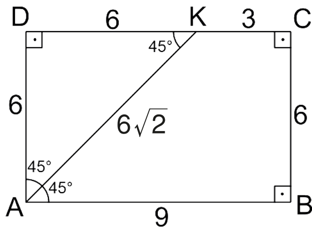
Örnek 40



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[AK]$, A köşesine ait açıortaydır. $|AK| = 6\sqrt{2}$ cm ve $|KC| = 3$ cm ise ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



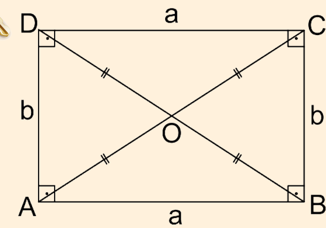
Çözüm



$[AK]$ açıortay olduğundan $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{BAK}) = 45^\circ$ olur. Bu durumda ADK ikizkenar dik üçgendir. Açılarının ölçüleri $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ olan bir üçgende hipotenüs uzunluğu dik kenarların uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı olacağından
$|AD| = |DK| = 6$ cm olur. Buradan
$Ç(ABCD) = 2 \cdot (|AB| + |BC|) = 2 \cdot (9 + 6) = 30$ cm bulunur.



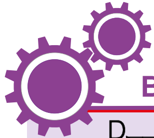
İpucu



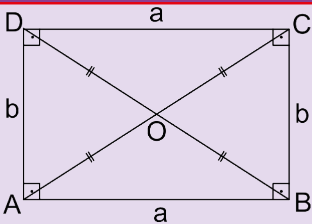
Dikdörtgene ait köşegen uzunlukları eşittir. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,

- $|AC| = |BD|$
- $|AO| = |BO| = |CO| = |DO|$ olur.

Bu ifadelerin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

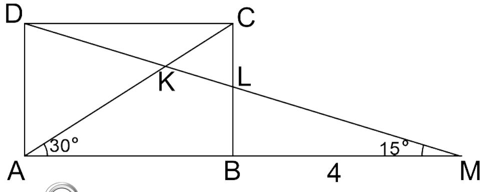


Yandaki şekilde ABD dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile
$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |BD|^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow |BD| = \sqrt{b^2 + a^2}$ olur.
ABC dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile
$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |AC|^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{b^2 + a^2}$ olur.

Bu durumda köşegen uzunlukları eşittir ve şekle göre $|AC| = |BD|$ olur.
Dikdörtgen aynı zamanda paralelkenar olduğundan köşegenler birbirini ortalar. Köşegenler ise birbirine eşit olduğundan şekle göre $|AO| = |BO| = |CO| = |DO|$ olur.



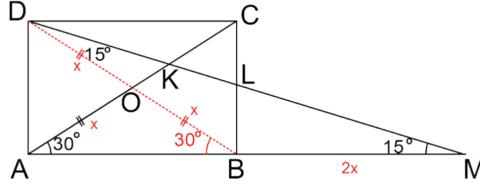
Örnek 41



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[AC]$ köşegen ve A, B, M ve D, K, L, M noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{CAB}) = 30°$, $m(\widehat{DMA}) = 15°$ ve $|BM| = 4$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

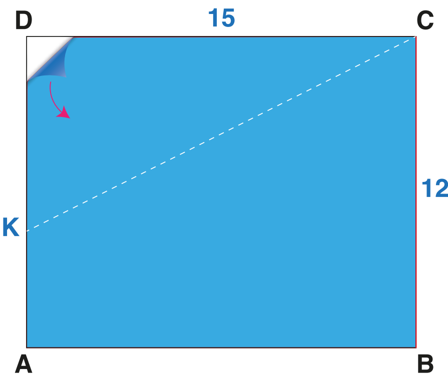


$[BD]$ köşegeni çizilip dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından $|AO| = |BO| = x$ denilirse AOB ikizkenar üçgen ve $m(\widehat{DBA}) = 30°$ olur.

$\widehat{DBM}$ nde D ve M köşelerindeki iç açıların ölçüleri toplamı B köşesindeki dış açının ölçüsüne eşit olduğundan $m(\widehat{MDB}) + m(\widehat{DMB}) = m(\widehat{DBA}) \Rightarrow m(\widehat{MDB}) + 15° = 30° \Rightarrow m(\widehat{MDB}) = 15°$ olur. Bu durumda DBM ikizkenar üçgendir ve $|DB| = |BM| = 2x$ olur. Buradan $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ elde edilir.
$30° - 30° - 120°$ açılarına sahip AOB ikizkenar üçgeninde eşit uzunluktaki kenarlar x birim iken $120°$ nin karşısındaki kenar uzunluğu $x\sqrt{3}$ birim olur. Bu durumda $30° - 30° - 120°$ açıları olan $\widehat{AOB}$ nde $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm bulunur.



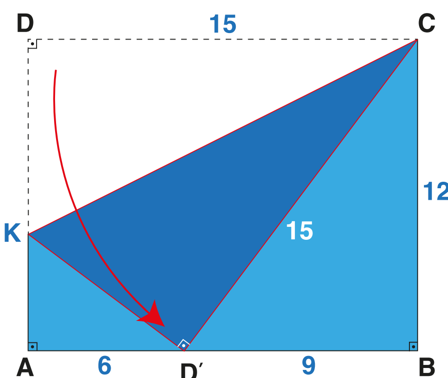
Örnek 42



Yanda ABCD dikdörtgeni şeklindeki kağıt verilmiştir. Bu dikdörtgende $|BC| = 12$ cm ve $|DC| = 15$ cm dir. $K \in [AD]$ olmak üzere D köşesi $[KC]$ boyunca $[AB]$ üzerindeki bir D′ noktasına gelecek şekilde katlandığında oluşan şekilde $|AD'|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



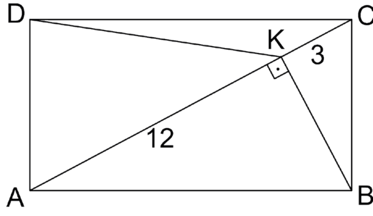
Çözüm



D noktası D′ noktası üzerine gelecek biçimde yandaki şekilde verildiği gibi katlanırsa $|CD'| = 15$ cm olur.
$D'BC$, dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile $|D'B| = 9$ cm olur. Bu durumda $|AD'| + |D'B| = |AB| = |DC|$ ise $|AD'| + 9 = 15$ olur ve $|AD'| = 6$ cm bulunur.



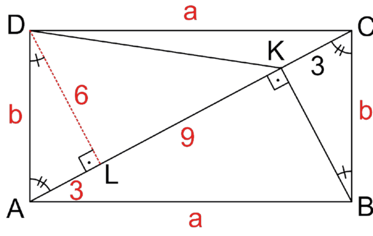
Örnek 43



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde AC köşegen, $[BK] \perp [AC]$, $|KC| = 3$ cm ve $|AK| = 12$ cm olduğuna göre $|DK|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[DL] \perp [AC]$ olacak şekilde $[DL]$ çizilir, $|DC| = |AB| = a$ ve $|DA| = |CB| = b$ yazılırsa A.K.A. eşlik teoremi ile $\widehat{ADL} \cong \widehat{CBK}$ olduğundan $|AL| = |CK| = 3$ cm elde edilir.

$\widehat{ADC}$ nde Öklid teoremi ile

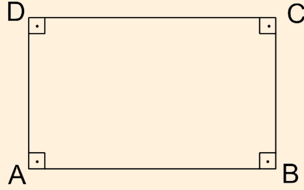
$|DL|^2 = |AL| \cdot |LC| \Rightarrow |DL|^2 = 3 \cdot 12 \Rightarrow |DL|^2 = 36 \Rightarrow |DL| = 6$ cm olur.

Bu durumda $\widehat{DLK}$ nde Pisagor teoremi ile

$|DK|^2 = |DL|^2 + |LK|^2 \Rightarrow |DK|^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow |DK|^2 = 117 \Rightarrow |DK| = 3\sqrt{13}$ cm bulunur.

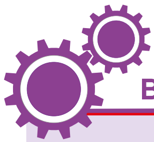


İpucu

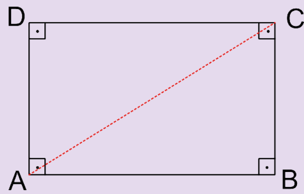


ABCD dikdörtgeninin alanı $A(ABCD) = |AB| \cdot |BC|$ olur.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



ABCD dikdörtgeni aynı zamanda paralelkenar olduğundan $[AC]$ dikdörtgeni eş alanlı iki bölgeye ayırır. Bu durumda

$$\frac{A(ABCD)}{2} = A(\widehat{ABC}) \Rightarrow \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2}$$

$\Rightarrow A(ABCD) = |AB| \cdot |BC|$ olmaktadır.

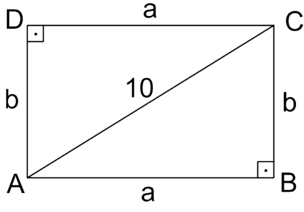


Örnek 44

Alanı $48\,cm^2$ ve köşegen uzunluğu 10 cm olan dikdörtgenin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$A(ABCD) = 48 \Rightarrow a \cdot b = 48$ olur.

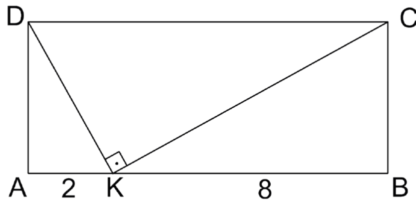
ABC dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile $a^2 + b^2 = 10^2$ ise $a^2 + b^2 = 100$ elde edilir. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğinde $a \cdot b = 48$ ve $a^2 + b^2 = 100$ değerleri yerine yazılırsa

$(a + b)^2 = 100 + 2 \cdot 48 \Rightarrow (a + b)^2 = 196 \Rightarrow a + b = 14$ cm olur.

Bu durumda $Ç(ABCD) = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot 14 = 28$ cm bulunur.



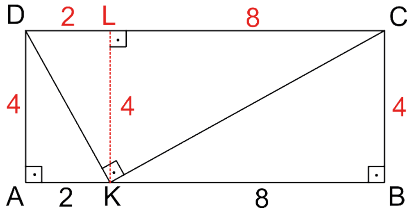
Örnek 45



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[DK] \perp [KC]$, $|AK| = 2$ cm ve $|KB| = 8$ cm olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

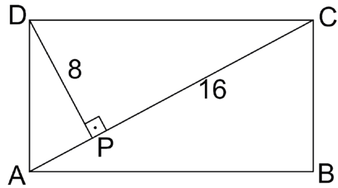


$[KL] \perp [DC]$ olacak şekilde $[KL]$ çizilir. AKLD dikdörtgen olduğundan $|AK| = |DL| = 2$ cm olur. KBCL dikdörtgen olduğundan $|KB| = |LC| = 8$ cm olur.
DKC dik üçgeninde Öklid teoremi ile
$|KL|^2 = |DL| \cdot |LC| \Rightarrow |KL|^2 = 2 \cdot 8 \Rightarrow |KL|^2 = 16 \Rightarrow |KL| = 4$ cm bulunur.

Yukarıda verilen şekilde $[AD] \mathbin{/\!/} [KL] \mathbin{/\!/} [BC]$ olduğundan $|AD| = |KL| = |BC| = 4$ cm olur. Buradan $A(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = 10 \cdot 4 = 40\ cm^2$ bulunur.



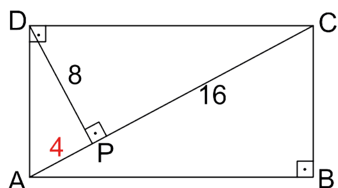
Örnek 46



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[AC]$ köşegen, $[DP] \perp [AC]$, $|DP| = 8$ cm ve $|PC| = 16$ cm olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



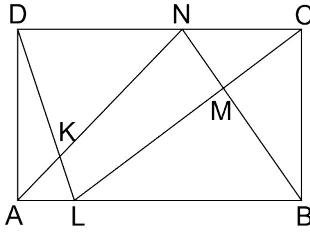
Çözüm



Şekildeki $\widehat{ADC}$ nde Öklid teoremi ile
$|DP|^2 = |AP| \cdot |PC| \Rightarrow 8^2 = |AP| \cdot 16 \Rightarrow 64 = |AP| \cdot 16 \Rightarrow |AP| = 4$ cm olur.
Bu durumda köşegen dikdörtgeni iki eş parçaya ayırdığından
$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ADC}) = \cancel{2} \cdot \dfrac{|AC| \cdot |DP|}{\cancel{2}} = 20 \cdot 8 = 160\ cm^2$ bulunur.



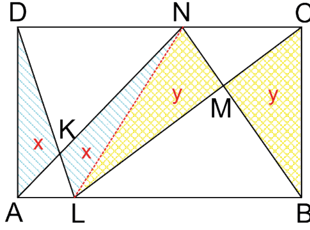
Örnek 47



Yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgen, ANB ve DLC birer üçgen olup $A(KLMN) = 15\ cm^2$ olduğuna göre $A(\widehat{DAK}) + A(\widehat{BMC})$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

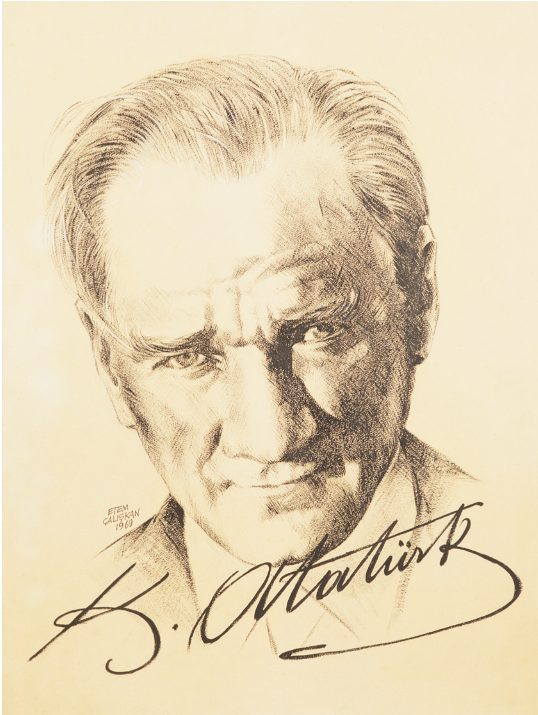


$[LN]$ çizilerek ALND ve LBCN yamukları oluşturulur.

ALND yamuğunda $A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{KLN}) = x$ ve LBCN yamuğunda $A(\widehat{BMC}) = A(\widehat{LMN}) = y$ denilsin. Bu durumda $x + y$ değeri KLMN dörtgeninin alanı olduğundan $A(\widehat{DAK}) + A(\widehat{BMC}) = x + y = 15\ cm^2$ bulunur.



Örnek 48



Atatürk'ü çok seven Yağmur Hanım, evinin girişinde bulunan kare biçimindeki eş seramiklerle kaplanmış duvarın yüzeyine, boyutları 330 cm ve 390 cm olan dikdörtgen şeklinde Etem ÇALIŞKAN'a ait Atatürk resminin ve imzasının bulunduğu bir poster asmıştır. Duvara asılan poster, duvarı tam olarak kapladığına göre bu duvar yüzeyinde bulunan seramik sayısının **en az** kaç tane olduğunu bulunuz.



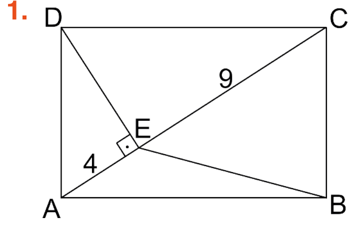
Çözüm

Duvarı kaplayan kare şeklindeki seramiklerin en az sayıda olabilmesi için bir seramiğin bir kenar uzunluğunun alabileceği en büyük değeri alması gerekir. Bu değer, 330 ile 390 un en büyük ortak böleni olan 30 cm dir. Bu durumda bir kenarı 30 cm olan seramik sayısı, posterin yüzey alanının eş olan bu karelerden bir tanesinin yüzey alanına bölünmesi ile bulunur. Buradan seramik sayısı en az $\frac{330 \cdot 390}{30 \cdot 30} = 143$ tane olur.



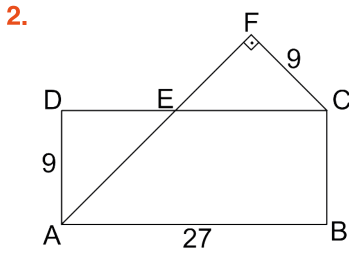
ALIŞTIRMALAR

1.



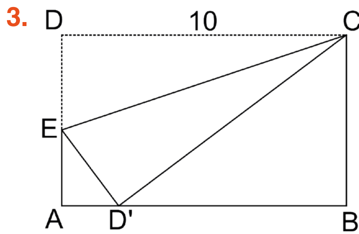
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde A, E, C noktaları doğrusal; $[DE] \perp [AC]$; $|AE| = 4$ cm ve $|EC| = 9$ cm olduğuna göre $|EB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

2.



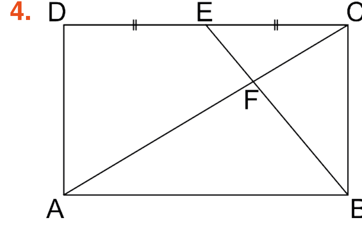
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[AF] \perp [FC]$; $|AD| = 9$ cm, $|AB| = 27$ cm ve $|FC| = 9$ cm olduğuna göre $|DE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



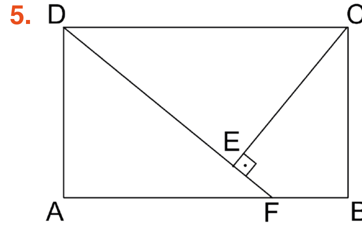
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde D köşesi $[EC]$ üzerine katlanarak $[AB]$ üzerindeki D' noktası elde edilmiştir. $|DC| = 10$ cm ve $|BC| = 6$ cm olduğuna göre $|AD'|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



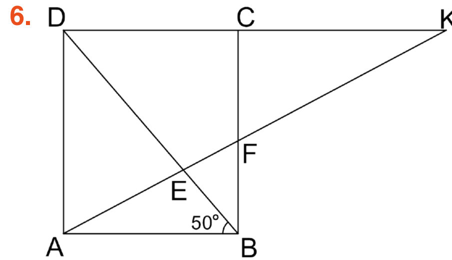
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $[AC]$ köşegen ve E, F, B noktaları doğrusaldır. $|DE| = |EC|$, $|EF| = 10$ cm ve $|AD| = 24$ cm olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde D, E, F noktaları doğrusaldır. $|CE| = 6$ cm, $|DF| = 12$ cm ve $[CE] \perp [DF]$ olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6.

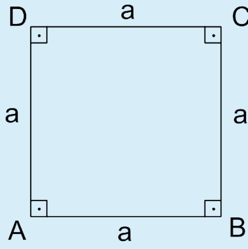


Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgen ve A, E, F, K noktaları ile D, C, K noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ ve $|DB| = |CK|$ olduğuna göre $m(\widehat{EFB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Kare ve Özellikleri



Bilgi

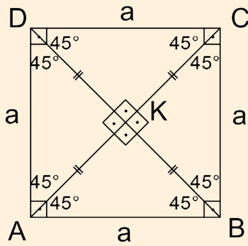


Dört kenar uzunluğu eşit olan dikdörtgene **kare** denir.
Kare aynı zamanda paralelkenar, dikdörtgen ve eşkenar dörtgendir.
Yandaki ABCD karesinde,

- $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ cm,
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olmaktadır.



İpucu



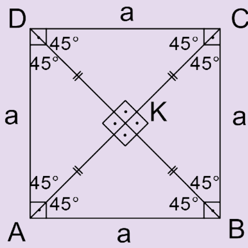
Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde,

- Köşegenler aynı zamanda açıortaylardır.
- Köşegen uzunlukları eşit olup birbirlerini dik ortalar.

Bu ifadelerin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

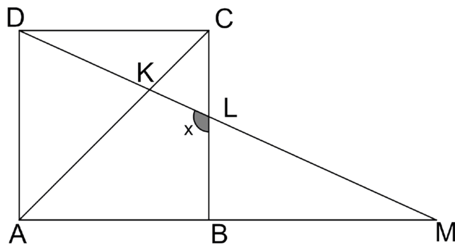


ABD ve BDC ikizkenar dik üçgen olduklarından taban açıları eşittir.
Buna göre $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{CBD}) = 45^\circ$ olur. Aynı şekilde ADC ile ABC ikizkenar dik üçgen olduğundan $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 45^\circ$ ve $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ olur.
Bu durumda her köşegen aynı zamanda açıortay olmaktadır.

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı ile $m(\widehat{DKC}) = m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{BKA}) = m(\widehat{CKB}) = 90^\circ$ olur. Buradan KBC, KCD, KDA, KAB aynı zamanda ikizkenar dik üçgen olduğundan $|DK| = |AK| = |BK| = |CK|$ olur.
Sonuç olarak karenin köşegen uzunlukları eşit olup birbirlerini dik ortalar.

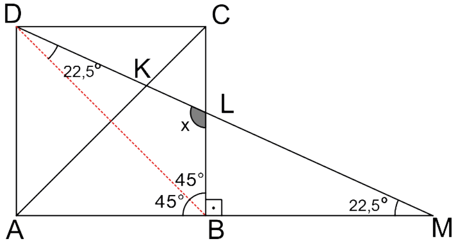


Örnek 49



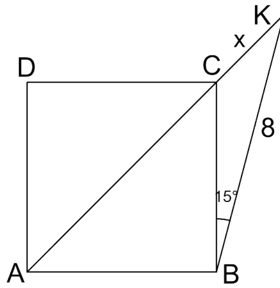
Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde D, K, L, M noktaları ile A, B, M noktaları doğrusal ve $|AC| = |BM|$ olmak üzere $m(\widehat{BLK}) = x$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



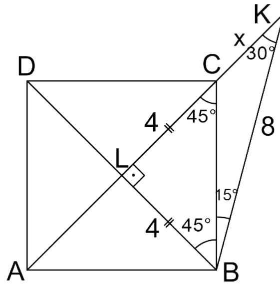
$[BD]$ çizilirse $|AC| = |BD| = |BM|$ olur.
Bu durumda DBM ikizkenar üçgendir ve $[BD]$ açıortay olduğundan $m(\widehat{DBM}) = m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{CBM}) = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ olur. DBM ikizkenar üçgen olduğundan taban açılarının ölçüleri $m(\widehat{DMB}) = m(\widehat{BDM}) = 22,5^\circ$ olur. Buradan
$m(\widehat{BLK}) = m(\widehat{LBM}) + m(\widehat{LMB}) = 90^\circ + 22,5^\circ = 112,5^\circ$
olduğundan $x = 112,5^\circ$ bulunur.

Örnek 50



Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde A, C, K noktaları doğrusal, $m(\widehat{CBK}) = 15^\circ$, $|BK| = 8\,cm$ ve $|CK| = x$ olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



$[BD]$ çizilsin. Karede köşegenler dik kesiştiğinden ve $[BD]$ açıortay olduğundan LBK, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olur. Bu durumda

$|LB| = \frac{|BK|}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm ve $|LK| = 4\sqrt{3}$ cm olur.

Ayrıca CLB ikizkenar dik üçgen olduğundan $|LC| = |LB| = 4$ cm olur.

Buradan $|LK| = |LC| + |CK|$

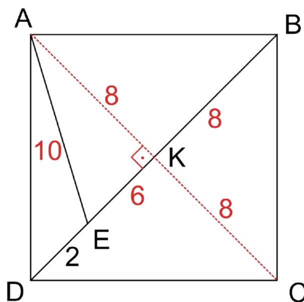
$4\sqrt{3} = 4 + x$

$x = 4\sqrt{3} - 4$ cm bulunur.

Örnek 51

ABCD karesinde $[BD]$ üzerinde $|DE| = 2$ cm ve $|EB| = 14$ cm olacak şekilde bir E noktası işaretleniyor. Buna göre $|AE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



ABCD karesi yanda verilen şekildeki gibi çizilebilir. $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ olacak şekilde $[AC]$ çizilirse AKE dik üçgeni elde edilir. Köşegenler birbirini ortaladığından $|BK| = |KD| = 8$ cm ve $|KE| = 6$ cm olur. Karenin köşegenleri eşit olduğundan $|AK| = |KC| = 8$ cm olur. AKE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AE|^2 = |AK|^2 + |KE|^2$

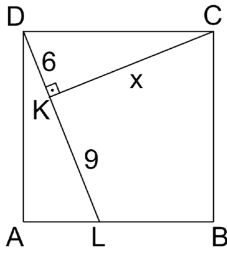
$|AE|^2 = 8^2 + 6^2$

$|AE|^2 = 100$

$|AE| = 10$ cm olarak bulunur.



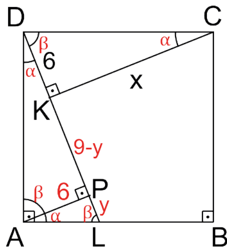
Örnek 52



Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde $[CK]\perp[DL]$; $|DK|=6$ cm, $|KL|=9$ cm ve $|KC|=x$ olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[AP]\perp[DL]$ olacak şekilde $[AP]$ çizilir ve açılar şekildeki gibi yazılırsa $\widehat{DKC}\cong\widehat{APD}$ olur. Buradan $|DK|=|AP|=6$ cm olur.

$|PL|=y$ ve $|KP|=9-y$ yazılıp ALD üçgeninde Öklid teoremi ile

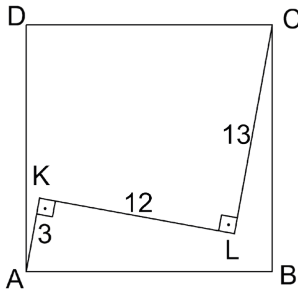
$$|AP|^2=|DP|\cdot|PL| \Rightarrow 6^2=(15-y)\cdot y$$
$$\Rightarrow 36=15y-y^2$$
$$\Rightarrow y^2-15y+36=0$$
$$\Rightarrow (y-3)\cdot(y-12)=0$$
$$\Rightarrow y=3 \text{ cm bulunur.} (y\neq 12)$$

$\widehat{DKC}\cong\widehat{APD}$ eşliği ile

$$|KC|=|PD| \Rightarrow x=|KP|+|KD| \quad (|PD|=|KP|+|KD|)$$
$$\Rightarrow x=9-y+6$$
$$\Rightarrow x=9-3+6$$
$$\Rightarrow x=12 \text{ cm bulunur.}$$



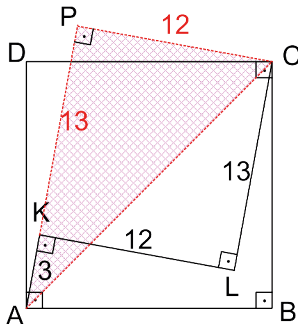
Örnek 53



Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde $|AK|=3$ cm, $|KL|=12$ cm, $|LC|=13$ cm ve $m(\widehat{AKL})=m(\widehat{KLC})=90^\circ$ olduğuna göre ABCD karesinin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



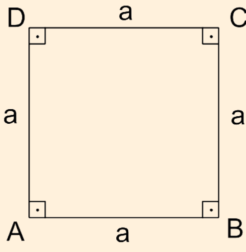
Çözüm



KLCP dikdörtgeni oluşturulursa $|KL|=|PC|=12$ cm ve $|LC|=|KP|=13$ cm olur. $[AC]$ çizildiğinde oluşan ACP dik üçgeninde $|PC|=12$ cm ve $|AP|=16$ cm olur. 12 cm-16 cm-20 cm dik üçgeni ile $|AC|=20$ cm bulunur.
ACP dik üçgeninin hipotenüsü aynı zamanda karenin köşegeni olduğundan karenin bir kenarına a cm denilirse
$|AC|=a\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 20=a\cdot\sqrt{2} \Rightarrow a=10\sqrt{2}$ cm olur.
Sonuç olarak $Ç(ABCD)=4a=4\cdot 10\sqrt{2}=40\sqrt{2}$ cm bulunur.



İpucu



Yandaki şekilde verilen bir kenarı a birim olan ABCD karesinin alanı $A(ABCD) = a^2$ birimkaredir.

Bu eşitliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

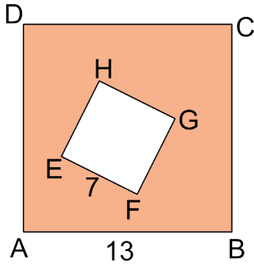


Buluyorum

Kare aynı zamanda bir dikdörtgen olduğundan
$A(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = a \cdot a = a^2$ birimkare bulunur.



Örnek 54



Yandaki şekilde verilen ABCD ve EFGH birer karedir. $|AB| = 13$ cm ve $|EF| = 7$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

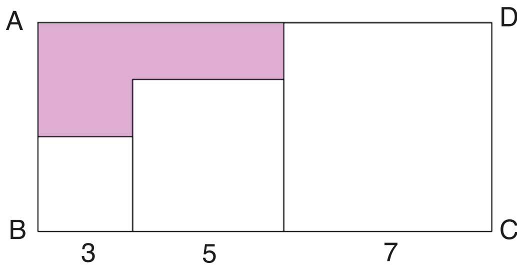


Çözüm

ABCD karesinin alanı $A(ABCD) = 13^2 = 169$ cm^2 olur. EFGH karesinin alanı ise $A(EFGH) = 7^2 = 49$ cm^2 olur. Boyalı bölgenin alanını bulmak için ABCD karesinin alanından EFGH karesinin alanı çıkarılırsa $169 - 49 = 120$ cm^2 bulunur.



Örnek 55



Yandaki şekilde verilen ABCD bir dikdörtgen ve içinde kenar uzunlukları 3 cm, 5 cm ve 7 cm olan kareler verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

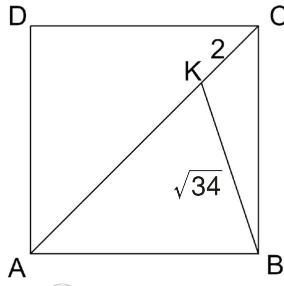


Çözüm

$|DC| = 7$ cm ve $|BC| = 15$ cm olduğundan $A(ABCD) = 7 \cdot 15 = 105$ cm^2 olur. Dikdörtgen içindeki karelerin alanları sırasıyla $9\,cm^2$, 25 cm^2 ve 49 cm^2 olur. Buradan boyalı bölgenin alanı $105 - (9 + 25 + 49) = 22$ cm^2 olur.



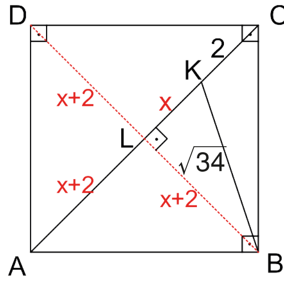
Örnek 56

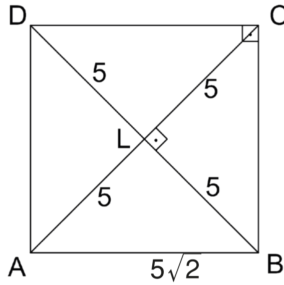


Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde $|KC| = 2$ cm ve $|KB| = \sqrt{34}$ cm dir. A, K ve C noktaları doğrusal olduğuna göre ABCD karesinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm





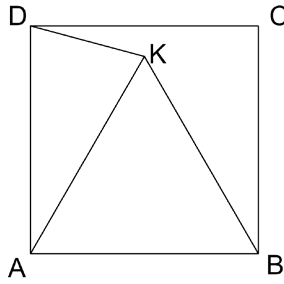
$[BD]$ çizilir ve $|LK| = x$ denilirse köşegenler birbirini dik ortaladığından
$|LC| = |LB| = |LD| = |LA| = 2 + x$ olur.
LBK dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$$|KB|^2 = |KL|^2 + |LB|^2 \Rightarrow (\sqrt{34})^2 = x^2 + (2+x)^2$$
$$\Rightarrow 34 = x^2 + 4 + 4x + x^2$$
$$\Rightarrow 34 = 2x^2 + 4x + 4$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0$$
$$\Rightarrow (2x+10)\cdot(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x = -5 \text{ veya } x = 3 \text{ olur.}$$

Uzunluk negatif olamayacağı için $x = 3$ cm olarak alınır.
Bu durumda $|LA| = |LB| = 5$ cm olur. LAB ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AB| = \sqrt{2}\cdot|LA| = 5\sqrt{2}$ cm olur. Buradan karenin alanı $A(ABCD) = (5\sqrt{2})^2 = 50\,cm^2$ bulunur.



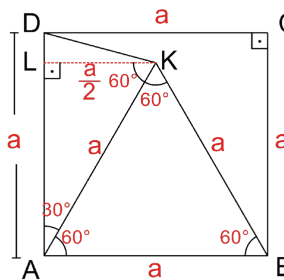
Örnek 57



Yandaki şekilde ABCD kare ve ABK eşkenar üçgendir. $A(\widehat{DAK}) = 36$ cm^2 olduğuna göre ABCD karesinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



Açılar ve uzunluklar şekildeki gibi yerleştirildikten sonra $[KL] \perp [AD]$ olacak şekilde bir $L \in [AD]$ seçilir.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni yardımıyla $|LK| = \dfrac{|AK|}{2} = \dfrac{a}{2}$ olur.

Bu durumda

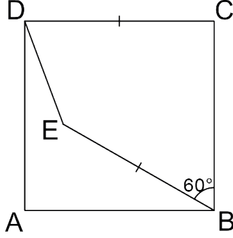
$A(\widehat{DAK}) = \dfrac{|DA|\cdot|LK|}{2} \Rightarrow 36 = \dfrac{a\cdot\frac{a}{2}}{2} \Rightarrow 36 = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$ cm elde edilir.

Sonuç olarak $A(ABCD) = a^2 = 144$ cm^2 bulunur.



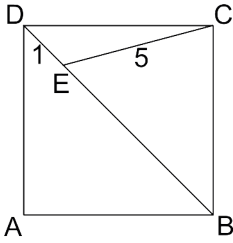
ALIŞTIRMALAR

1.



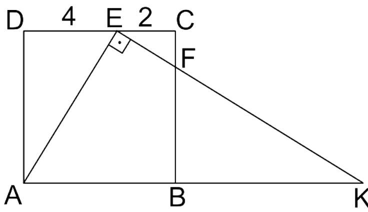
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $m(\widehat{CBE}) = 60^\circ$ ve $|DC| = |EB|$ olduğuna göre $m(\widehat{EDA})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



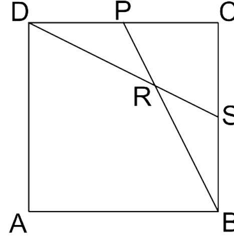
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $[DB]$ köşegendir.
$|DE| = 1$ cm ve $|EC| = 5$ cm olduğuna göre $|BE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



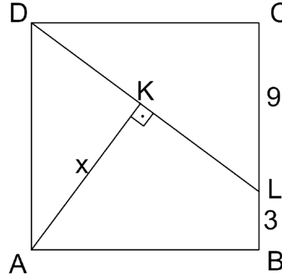
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde E, F, K ve A, B, K noktaları doğrusal, $[AE] \perp [EK]$ ve $|DE| = 2 \cdot |EC| = 4$ cm olduğuna göre $|BK|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



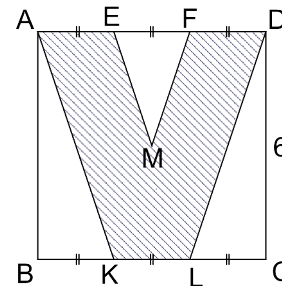
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde D, R, S ve P, R, B noktaları doğrusal olup P ve S noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Buna göre $\dfrac{A(\widehat{PDR}) + A(\widehat{RSB})}{A(ABCD)}$ oranını bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $|CL| = 9$ cm, $|LB| = 3$ cm; $[AK] \perp [DL]$ ve $|AK| = x$ olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

6.

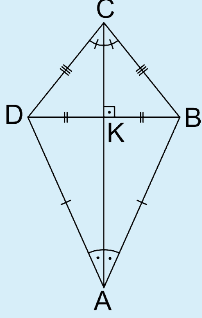


Yukarıdaki şekilde bir kenarı 6 cm olan ABCD karesinde $[AD]$ ve $[BC]$ üç eşit parçaya ayrılmıştır. $[EM] \parallel [AK]$ ve $[MF] \parallel [DL]$ olduğuna göre taralı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Deltoid ve Özellikleri



Bilgi

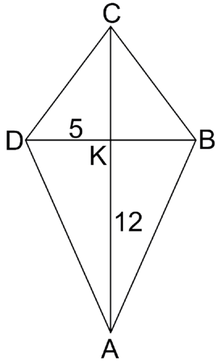


Bir ABCD dörtgeninde $|DC| = |BC|$ ve $|DA| = |BA|$ ise bu dörtgene **deltoid** denir. Şekildeki ABCD dörtgeni deltoid olmak üzere

- $[AC] \perp [DB]$
- $|DK| = |KB|$ olur.
- $[AC]$ köşegeni aynı zamanda açıortaydır.
- $m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CBA})$ olur.



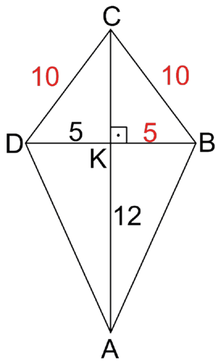
Örnek 58



Yandaki şekilde ABCD dörtgeni deltoid, $|DC| = |CB|$, $[AC]$ ve $[BD]$ deltoidin köşegenleri, $|DK| = 5$ cm, $|KC| = 5\sqrt{3}$ cm ve $|KA| = 12$ cm olduğuna göre ABCD deltoidinin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



Deltoidin köşegenlerinden biri diğerini eş uzunlukta iki parçaya ayırmaktadır. Bu durumda $|DK| = |KB| = 5$ cm olur.

Deltoidde köşegenler dik kesiştiğinden CKD ve DKA dik üçgenlerinde Pisagor teoremi ile

$|DC|^2 = |DK|^2 + |KC|^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100$

$|DC| = 10$ cm olur.

Benzer şekilde

$|DA|^2 = |DK|^2 + |KA|^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

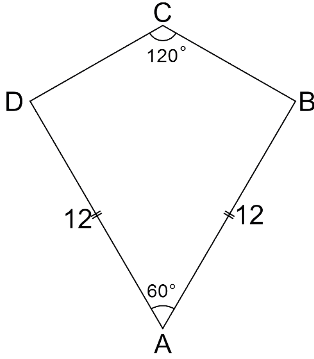
$|DA| = 13$ cm olur.

$|DC| = |BC| = 10$ cm ve $|DA| = |BA| = 13$ cm olarak bulunur.

Buradan $Ç(ABCD) = |DC| + |BC| + |BA| + |DA| = 10 + 10 + 13 + 13 = 46$ cm olur.



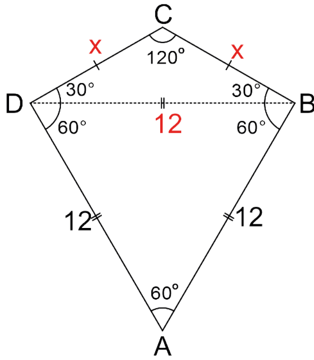
Örnek 59



Yandaki şekilde ABCD dörtgeni deltoid olmak üzere $|DA| = |BA| = 12$ cm, $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{DCB}) = 120^\circ$ olduğuna göre ABCD deltoidinin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



$[BD]$ çizilirse ABD eşkenar üçgen ve $|BD| = 12$ cm olur. ABCD dörtgeni deltoid olduğundan

$|DC| = |CB|$ ve $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{CBD}) = 30^\circ$ olur.

$30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ üçgeninde 30° lik açının karşısındaki kenar uzunluklarına x cm denilirse 120° lik açının karşısındaki kenar uzunluğu $x \cdot \sqrt{3}$ cm olur.

Buradan

$x \cdot \sqrt{3} = 12 \Rightarrow x = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm elde edilir.

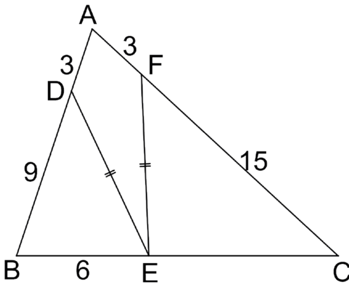
Sonuç olarak $Ç(ABCD) = |CD| + |CB| + |BA| + |AD|$

$= 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12 + 12$

$= 24 + 8\sqrt{3}$ cm bulunur.



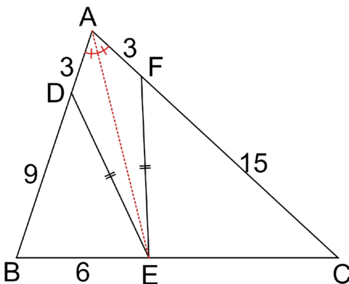
Örnek 60



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde $|DE| = |EF|$, $|AD| = |AF| = 3$ cm, $|DB| = 9$ cm, $|FC| = 15$ cm ve $|BE| = 6$ cm olduğuna göre $|EC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



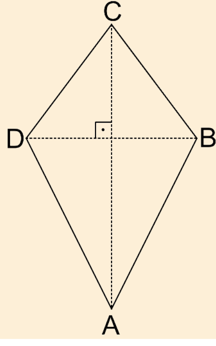
ADEF dörtgeninde ikişer kenar uzunluğu eşit fakat karşılıklı kenar uzunlukları eşit olmadığından bu dörtgen bir deltoiddir. Bu durumda $[AE]$ açıortaydır.

ABC üçgeninde $[AE]$ iç açıortay olduğundan iç açıortay teoremi ile

$\dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{|AC|}{|EC|} \Rightarrow \dfrac{12}{6} = \dfrac{18}{|EC|} \Rightarrow |EC| = 9$ cm bulunur.



İpucu



$[AC]$ ve $[BD]$ ABCD deltoidinin köşegenleri olmak üzere deltoidin alanı,

$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$ olur.



Örnek 61

Köşegenlerinden birinin uzunluğu diğerinin uzunluğunun 3 katı olan bir deltoidin alanı 24 cm^2 olduğuna göre uzun köşegenin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

Kısa köşegenin uzunluğu k cm olsun. Buradan uzun köşegenin uzunluğu 3k cm olur. Deltoidin alanı köşegen uzunlukları çarpımının yarısı olduğundan

$\frac{k \cdot 3k}{2} = 24$

$3k^2 = 48$

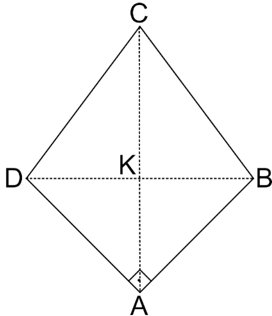
$k^2 = 16$

$k = 4$ cm olur.

Buradan uzun köşegenin uzunluğu $3 \cdot 4 = 12$ cm olarak bulunur.



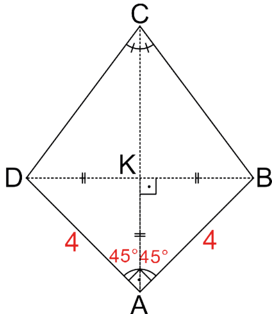
Örnek 62



Yandaki ABCD deltoidinde $[DA] \perp [AB]$, $[DB] \cap [CA] = \{K\}$, $|CK| = 3 \cdot |KA|$ $|DC| = |CB|$, $|AB| = 4$ cm olduğuna göre ABCD deltoidinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

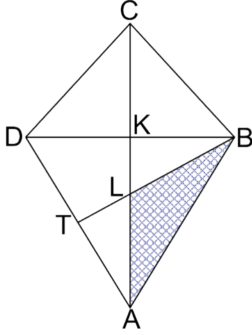


ABCD deltoidinde $|DK| = |KB|$ olur. DAB ikizkenar dik üçgen olduğundan $|DB| = 4\sqrt{2}$ cm olur. Buradan $|DK| = |KB| = 2\sqrt{2}$ cm bulunur. DAB dik üçgeninde $[AK]$ hipotenüse ait kenarortay olduğundan $|AK| = 2\sqrt{2}$ cm olur. Verilen $|CK| = 3 \cdot |KA|$ eşitliği ile $|CK| = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm olur.

Bu durumda $A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 32 \text{ cm}^2$ bulunur.



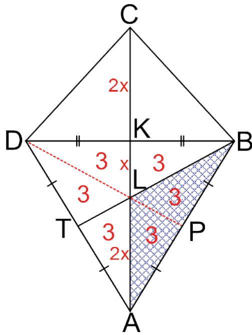
Örnek 63



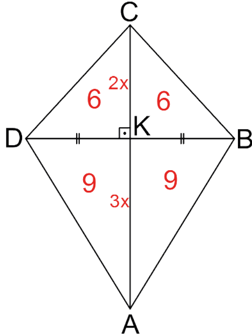
Yandaki şekilde verilen ABCD deltoidinde $[AC]$ ve $[DB]$ köşegen, $|AD| = |AB|$, $|DT| = |TA|$, $|CK| = 2 \cdot |KL|$ ve $A(\widehat{ABL}) = 6 \text{ cm}^2$ olduğuna göre ABCD deltoidinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



ABCD deltoid olduğundan verilenlere göre $|DK| = |KB|$ olur. Aynı zamanda $|DT| = |TA|$ olduğundan L noktası ABD üçgeninin ağırlık merkezidir. Bu durumda $[DP]$ kenarortayı çizilirse $A(\widehat{LAP}) = A(\widehat{LBP}) = A(\widehat{LBK}) = A(\widehat{LDK}) = A(\widehat{LDT}) = A(\widehat{LAT}) = 3 \text{ cm}^2$ olur. Ayrıca L noktası ABD üçgeninin ağırlık merkezi olduğu için $|KL| = x$ denilirse $|LA| = 2x$ ve $|CK| = 2|KL|$ olduğundan $|CK| = 2x$ olur.



$\widehat{CDA}$ nde $|DK|$ olan yükseklik hem $\widehat{CDK}$ nin hem de $\widehat{ADK}$ nin yüksekliğidir. Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğundan

$$\frac{A(\widehat{CDK})}{A(\widehat{ADK})} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow \frac{A(\widehat{CDK})}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow A(\widehat{CDK}) = 6 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $A(\widehat{CDK}) = A(\widehat{CBK}) = 6 \text{ cm}^2$ bulunur.
Sonuç olarak $A(ABCD) = 6 + 6 + 9 + 9 = 30 \text{ cm}^2$ elde edilir.

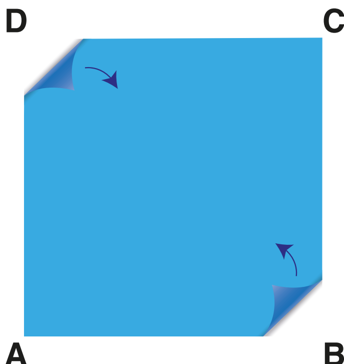


Örnek 64

Origami tekniği ile kare şeklinde bir kağıttan deltoid elde ediniz.



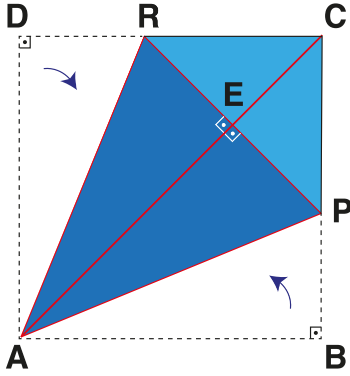
Çözüm



Yandaki gibi kare şeklinde bir kağıt alınız. Kağıdın köşelerini daha rahat katlama yapabilmek için isimlendiriniz.

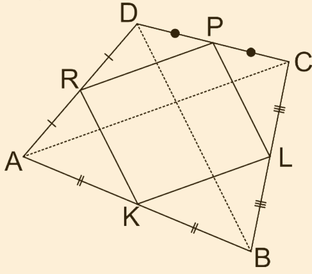
A ile C noktalarını birleştirerek AC köşegenini çiziniz. Daha sonra sırayla [AB], [AC] nın üstüne gelecek şekilde; [AD], [AC] nın üstüne gelecek şekilde katlayınız.

Bu işlemler sonunda elde edilen ARCP dörtgeni bir deltoid olur.





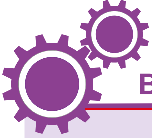
İpucu



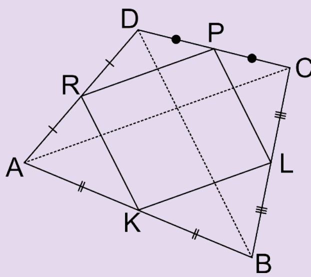
Bir dörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek elde edilen dörtgen **paralelkenar** olur. Yandaki ABCD dörtgeni için

- KLPR dörtgeni paralelkenardır.
- $|AC| = |BD|$ ise KLPR dörtgeni eşkenar dörtgendir.
- $[AC] \perp [BD]$ ise KLPR dörtgeni dikdörtgendir.
- $[AC] \perp [BD]$ ve $|AC| = |BD|$ ise KLPR dörtgeni karedir.

Bu ifadelerden KLPR dörtgeninin paralelkenar olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum



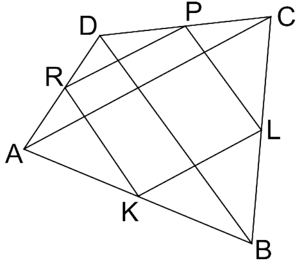
ABD üçgeninde [KR] orta taban olduğundan $[KR] \parallel [BD]$, $|KR| = \frac{|BD|}{2}$ ve CDB üçgeninde [LP] orta taban olduğundan $[LP] \parallel [BD]$, $|LP| = \frac{|BD|}{2}$ şeklindedir. Bu durumda $|KR| = |LP|$ olur.

ADC üçgeninde [PR] orta taban olduğundan $[PR] \parallel [AC]$, $|PR| = \frac{|AC|}{2}$ ve ABC üçgeninde [KL] orta taban olduğundan $[KL] \parallel [AC]$, $|KL| = \frac{|AC|}{2}$ şeklindedir. Bu durumda $|PR| = |LK|$ olur.

Sonuç olarak KLPR dörtgeninin karşılıklı kenarları hem paralel hem eşit uzunlukta olmuştur.
Buradan KLPR dörtgeninin paralelkenar olduğu sonucuna ulaşılır.
Siz de diğer verilenlerin doğruluğunu göstererek sınıfta arkadaşlarınıza sunum yapınız.



Örnek 65

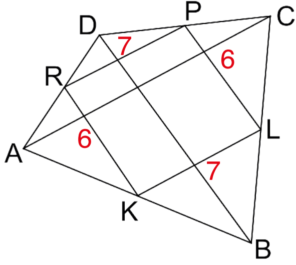


Yandaki ABCD dörtgeninde K, L, P, R noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AC| = 14$ cm ve $|BD| = 12$ cm olduğuna göre KLPR dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

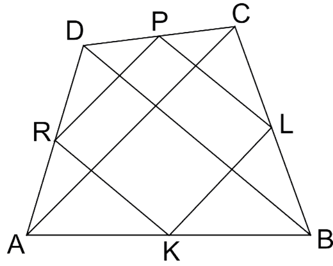
PRKL dörtgeni paralelkenar olduğundan $|PR| = |LK| = \frac{|AC|}{2}$ ve $|PR| = |LK| = 7$ cm bulunur. Benzer şekilde $|RK| = |PL| = \frac{|DB|}{2}$ ve $|RK| = |PL| = 6$ cm bulunur.



Bu durumda $Ç(KLPR) = |PR| + |LK| + |RK| + |PL| = 7 + 7 + 6 + 6 = 26$ cm olur.



Örnek 66



Yandaki ABCD dörtgeninde K, L, P, R noktaları bulundukları kenarların orta noktaları, [AC] ve [BD] köşegendir. KLPR dörtgeni eşkenar dörtgen ve $Ç(KLPR) = 40$ cm olduğuna göre Ç(ABCD) nin alabileceği tam sayı değerinin **en az** kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

$Ç(KLPR) = 40$ cm ise $|KL| + |LP| + |PR| + |RK| = 40$ cm olur. KLPR eşkenar dörtgeninin kenarları orta taban olduğundan $|KL| = |LP| = |PR| = |RK| = \frac{|AC|}{2} = \frac{|BD|}{2} = 10$ cm ve buradan $|AC| = |BD| = 20$ cm bulunur.

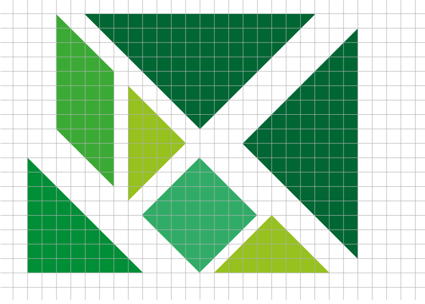
ADC üçgeninde üçgen eşitsizliği ile $|AC| < |AD| + |DC|$ şeklindedir. ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği ile $|AC| < |AB| + |BC|$ şeklindedir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

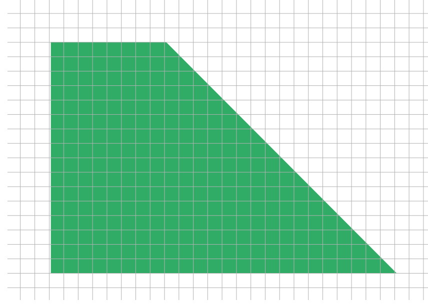
$$2 \cdot |AC| < |AD| + |DC| + |AB| + |BC|$$
$$2 \cdot 20 < Ç(ABCD)$$
$$40 < Ç(ABCD) \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak Ç(ABCD) nin tam sayı değeri en az 41 cm olarak bulunur.



Örnek 67

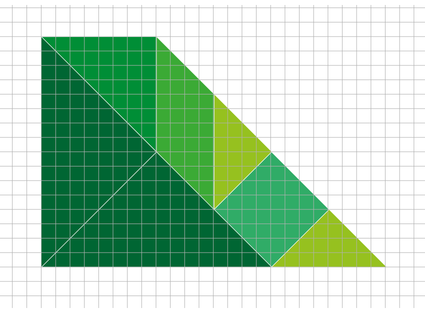




Yukarıda sol tarafta birimkareli zeminde verilmiş olan tangram parçalarını sağ taraftaki birim kareli zeminde verilmiş olan dik yamuğun içine hiç parça artmayacak biçimde yerleştiriniz.



Çözüm



Verilen tangram parçaları dik yamuğun içine yandaki gibi yerleştirilebilir. Siz de akıllı telefon ve tabletlerinize tangram uygulaması indiriniz ve bu oyunu arkadaşlarınızla oynayınız.



Örnek 68



Mimar Oğuz Bey bir caminin dikdörtgen şeklindeki duvarlarından birisini yandaki şekilde gösterildiği gibi geleneksel Türk mimarisindeki çinilerle kaplamak istemektedir.

- Çinilerin her biri eşit büyüklükte ve kare şeklindedir.
- Duvarın kısa kenarı 4 m ve uzun kenarı 6 m dir.
- Bir çininin kenar uzunluğu 20 cm ve fiyatı 15 Türk lirasıdır.
- Bir usta çininin metrekaresini 75 Türk lirasına döşemektedir.

Buna göre

a) Oğuz Bey'in bu iş için kaç adet çini alması gerektiğini bulunuz.

b) Çinilerin toplam fiyatını ve Oğuz Bey'in ödeyeceği toplam parayı bulunuz.



Çözüm

a) Duvarın alanı bir adet çininin alanına bölünerek kaç adet çini gerektiği bulunur.

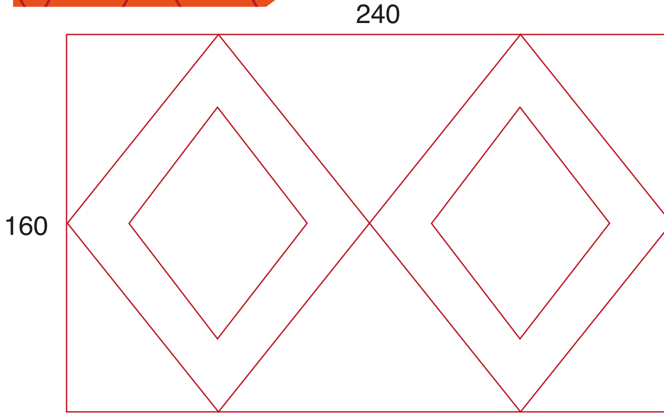
$4\ \text{m} = 400\ \text{cm}$ ve $6\ \text{m} = 600\ \text{cm}$ olduğundan gereken çini sayısı,

$\dfrac{400 \cdot 600}{20 \cdot 20} = 600$ olur.

b) Çinilere ödenecek para $600 \cdot 15 = 9000$ Türk lirasıdır. Çini ile kaplanacak alan $4 \cdot 6 = 24\ \text{m}^2$ olduğundan ve usta çininin metrekaresini 75 Türk lirasına döşediğinden ustaya ödenecek para $24 \cdot 75 = 1800$ Türk lirasıdır. Oğuz Bey'in ödeyeceği toplam para ise $9000 + 1800 = 10\,800$ Türk lirası olur.



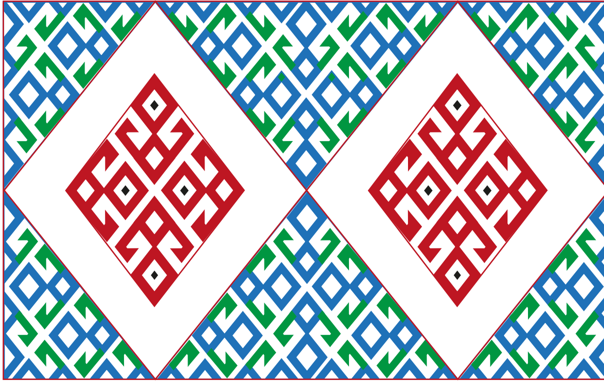
Örnek 69



Yandaki şekilde boyutları 160 cm ve 240 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir halı dijital baskı yöntemi ile boyanacaktır. Halı üzerine iki eş eşkenar dörtgen ve bunların içlerine yine eş eşkenar dörtgenler şekildeki gibi yerleştirilecektir. Dıştaki eşkenar dörtgenin köşegenlerinin uzunlukları 120 cm ve 160 cm, içteki eşkenar dörtgenin köşegenlerinin uzunlukları 80 cm ve 120 cm dir. İçteki eşkenar dörtgenlerin içine ve dıştaki eşkenar dörtgenlerin dışına desen yerleştirileceğine göre desen yerleştirilecek bölgenin alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.



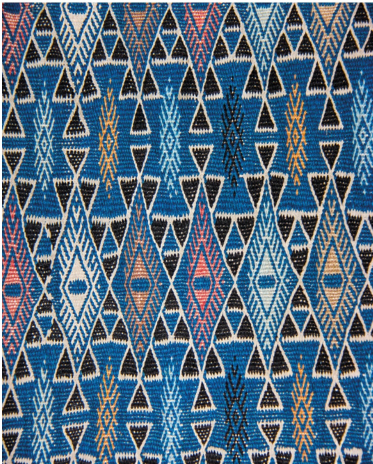
Çözüm

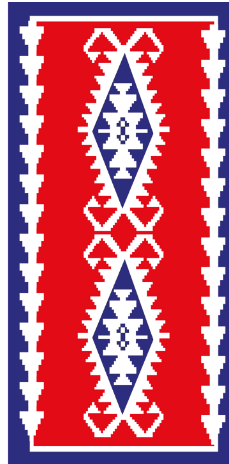


Halının alanı $160 \cdot 240 = 38\,400\ cm^2$ dir. Dıştaki eşkenar dörtgenin alanı $\frac{120 \cdot 160}{2} = \frac{19\,200}{2} = 9600\,cm^2$ ve içteki eşkenar dörtgenin alanı $\frac{80 \cdot 120}{2} = \frac{9600}{2} = 4800\,cm^2$ olur. İki eşkenar dörtgen arasındaki boşluğun alanı $9600 - 4800 = 4800\,cm^2$ dir. Halının alanından eşit büyüklükteki iki boşluğun alanı çıkarılırsa desen yerleştirilecek bölgenin alanı $38\,400 - 2 \cdot 4800 = 28\,800\ cm^2 = 2,88\ m^2$ bulunur.

Düşünüyorum

Anadolu insanının aşklarını, özlemlerini, ayrılık acılarını, sevinçlerini, üzüntülerini ilmek ilmek dokuduğu kilimlerdeki geometrik desenlere dikkat ettiniz mi?



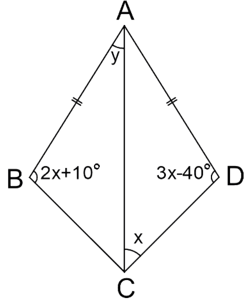






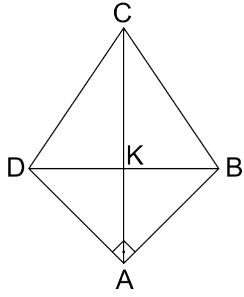
ALIŞTIRMALAR

1.



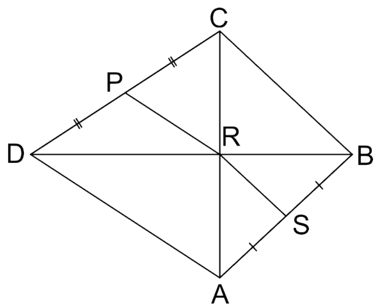
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde [AC] köşegen; |AB| = |AD|; $m(\widehat{ACD}) = x$ $m(\widehat{ABC}) = 2x + 10°$, $m(\widehat{ADC}) = 3x - 40°$ ve $m(\widehat{BAC}) = y$ olduğuna göre y değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

2



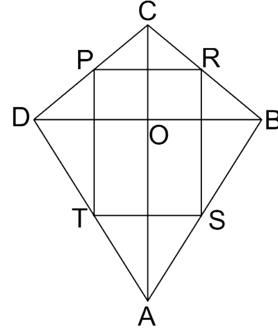
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde [AC] ve [DB] köşegen, [DA] ⊥ [BA], |AD| = |AB|, |KC| = 2 · |KA| ve $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm olduğuna göre ABCD deltoidinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

3.



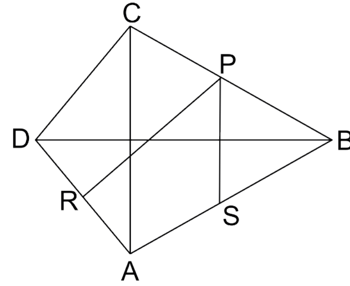
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde [AC] ve [DB] köşegen; |BC| = |AB|, |DP| = |PC|, |BS| = |SA|; |PR| = 5 cm ve |RS| = 3 cm olduğuna göre ABCD deltoidinin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



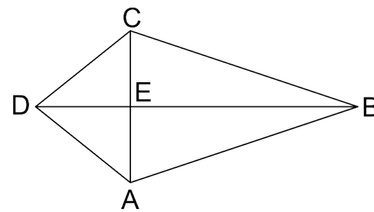
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde P, R, S, T noktaları bulundukları kenarların orta noktaları, [AC] ve [DB] köşegendir. |DC| = |CB|, |DB| = 8 cm ve A(PRST) = 20 cm^2 olduğuna göre |AC| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde P, R, S noktaları bulundukları kenarların orta noktaları, [AC] ve [DB] köşegendir. |AB| = |BC| ve |PS| = 9 cm, |PR| = 15 cm olduğuna göre |AC| + |BD| toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde [AC] ve [DB] köşegen; |AD| = |DC|; |DC| = 10 cm, |CB| = 17 cm ve |DB| = 21 cm olduğuna göre ABCD deltoidinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı .... derecedir.

2. n kenarlı bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü .... derecedir.

B) Aşağıda numaralarla açı bilgileri verilen ifadeler ile bu bilgilere ait harflerle verilen çokgenleri eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

3.

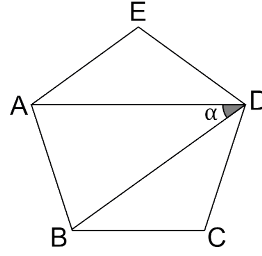
1. İç açılarının ölçüleri toplamı 360 derece olan çokgen
2. Bir dış açısının ölçüsü 40 derece olan düzgün çokgen
3. Bir iç açısının ölçüsü 135 derece olan düzgün çokgen
4. İç açılarının ölçüleri toplamı 540 derece olan çokgen

a) Dörtgen
b) Beşgen
c) Altıgen
ç) Sekizgen
d) Dokuzgen
e) Ongen
f) Onikigen

1.	2.	3.	4.

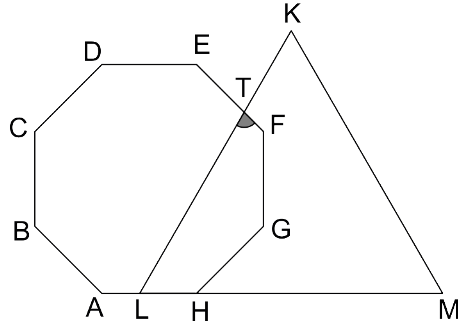
C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

4.



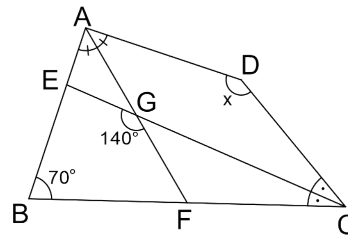
Yukarıdaki şekilde verilen ABCDE düzgün beşgeninde $m(\widehat{ADB}) = \alpha$ olduğuna göre α nın kaç derece olduğunu bulunuz.

5.



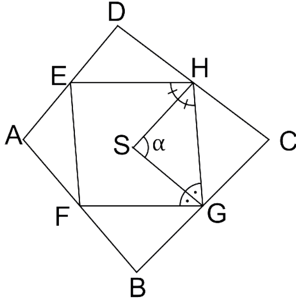
Yukarıdaki şekilde verilen ABCDEFGH düzgün sekizgen, KLM eşkenar üçgen olduğuna göre $m(\widehat{LTF})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



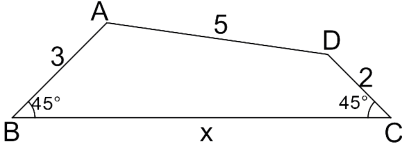
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde [CE] DCB açısının, [AF] BAD açısının açıortayıdır.
$m(\widehat{ABC}) = 70°$, $m(\widehat{EGF}) = 140°$ ve
$m(\widehat{ADC}) = x$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde E, F, G, H orta noktalardır. [HS] EHG açısının; [GS] ise HGF açısının açıortayı ve $m(\widehat{HSG}) = \alpha$ olduğuna göre α açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

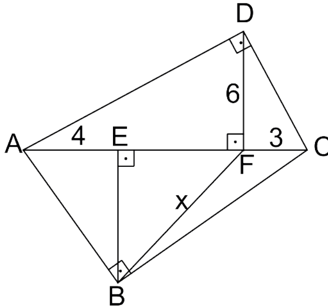
8.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 45°$; $|AB| = 3$ cm, $|AD| = 5$ cm, $|DC| = 2$ cm ve $|BC| = x$ cm olduğuna göre x değerinin kaç olduğunu bulunuz

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

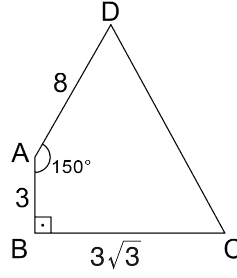
9.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[BA] \perp [BC]$, $[DA] \perp [DC]$, $[BE] \perp [AC]$, $[DF] \perp [AC]$; $|DF| = 6$ cm, $|FC| = 3$ cm, $|AE| = 4$ cm ve $|BF| = x$ cm olduğuna göre x değeri kaçtır?

A) 11 B) $2\sqrt{30}$ C) $4\sqrt{7}$ D) $6\sqrt{3}$ E) 10

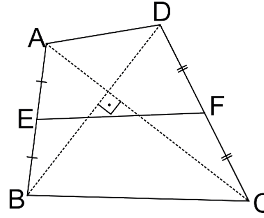
10.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AB] \perp [BC]$; $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 3\sqrt{3}$ cm, $|AD| = 8$ cm ve $m(\widehat{DAB}) = 150°$ olduğuna göre $|DC|$ kaç cm dir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$; $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC|$; $|AC| = 24$ cm ve $|BD| = 18$ cm olduğuna göre $|EF|$ kaç cm dir?

A) 20 B) 17 C) 15 D) 10 E) 5

DEĞERLENDİRME

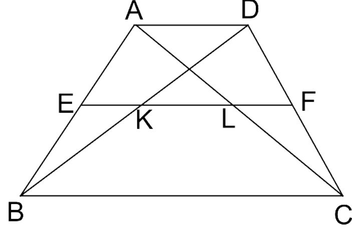
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

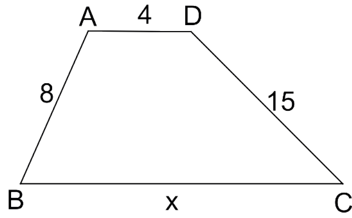
A) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

1.



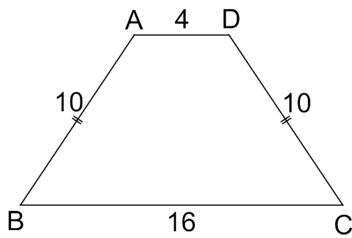
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AC] ve [BD] köşegen, [AD] ∕∕ [BC] ve [EF] orta tabandır. |KL| = 4 cm ve |BC| = 18 cm olduğuna göre |AD| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

2.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AD] ∕∕ [BC]; $m(\widehat{ADC}) - m(\widehat{ABC}) = 90°$; |AB| = 8 cm, |AD| = 4 cm, |DC| = 15 cm ve |DC| = x cm olduğuna göre x değerinin kaç olduğunu bulunuz.

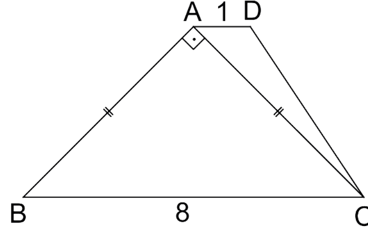
3.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda [AD] ∕∕ [BC]; |AB| = |DC| = 10 cm,

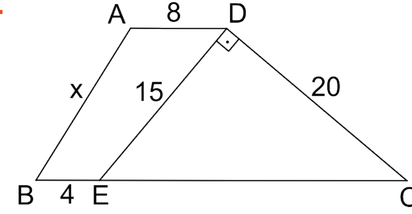
|AD| = 4 cm ve |BC| = 16 cm olduğuna göre ABCD yamuğunun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



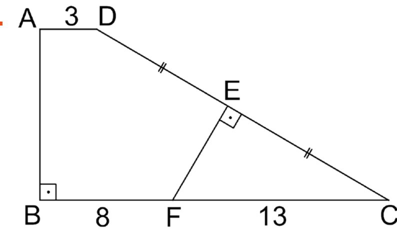
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AD] ∕∕ [BC], [AB] ⊥ [AC], |AB| = |AC|, |AD| = 1 cm ve |BC| = 8 cm olduğuna göre |DC| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.

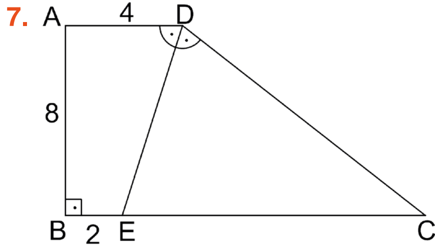


Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AD] ∕∕ [BC]; [ED] ⊥ [DC]; |DE| = 15 cm, |DC| = 20 cm, |AD| = 8 cm, |BE| = 4 cm ve |AB| = x cm olduğuna göre x değerinin kaç olduğunu bulunuz.

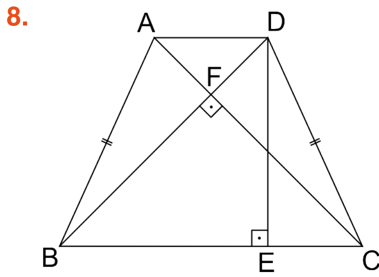
6.



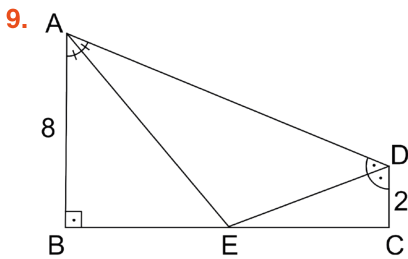
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda [AD] ∕∕ [BC]; [AB] ⊥ [BC], [FE] ⊥ [DC]; |DE| = |EC|; |AD| = 3 cm, |BF| = 8 cm ve |FC| = 13 cm olduğuna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

7. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD yamuğunda [AD] // [BC]; [AB] ⊥ [BC] ; $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{EDC})$; |AD| = 4 cm, |AB| = 8 cm ve |BE| = 2 cm olduğuna göre |DC| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

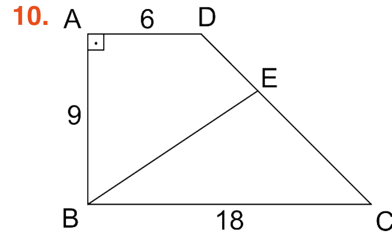
8. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda [AD] // [BC]; [DE] ⊥ [BC], [AC] ⊥ [BD]; |AB| = |DC| ve |DE| = 8 cm olduğuna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9. 

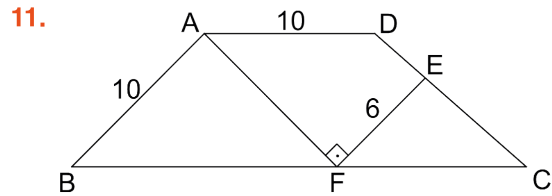
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda [AB] // [DC], [AB] ⊥ [BC], [AE] BAD açısının, [DE] ADC açısının açıortayıdır. |DC| = 2 cm, |AB| = 8 cm olduğuna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

B) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

10. 

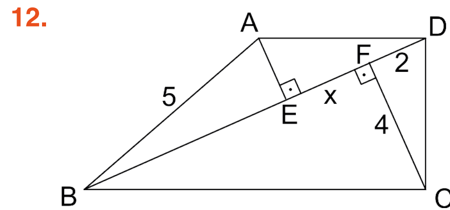
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda [BA] ⊥ [AD]; |AD| = 6 cm, |AB| = 9 cm ve |BC| = 18 cm olur. [BE] yamuğu eş alanlı iki bölgeye ayırdığına göre |DE| kaç cm dir?

A) $\sqrt{10}$ B) 4 C) $2\sqrt{5}$ D) 5 E) 6

11. 

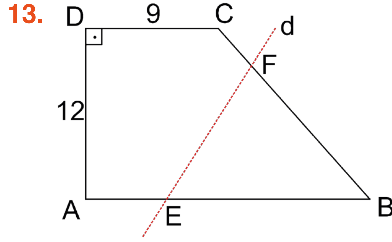
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda [AD] // [BC], [AF] // [DC]; [AF] ⊥ [FE]; |EF| = 6 cm ve |DC| = |AD| = |AB| = 10 cm olduğuna göre ABCD yamuğunun alanı kaç cm^2 dir?

A) 108 B) 144 C) 196 D) 216 E) 240

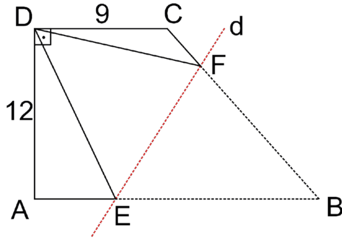
12. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda [AD] // [BC]; [BC] ⊥ [DC], [AE] ⊥ [BD], [CF] ⊥ [BD]; |AB| = 5 cm, |FD| = 2 cm ve |FC| = 4 cm olduğuna göre |EF| = x kaç cm dir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) 5

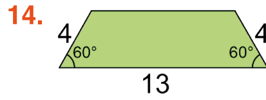
13. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[AD] \perp [DC]$; $|DC| = 9$ cm, $|AD| = 12$ cm ve $|AB| = 18$ cm dir. Bu yamuğun bir parçası olan EFB üçgeni d doğrusu boyunca katlandığında B noktası ile D noktası aşağıdaki şekilde verildiği gibi çakışmıştır.

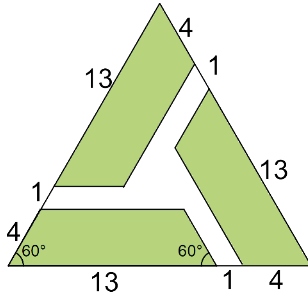


Buna göre $|CF|$ kaç cm dir?

A) 11 B) $\frac{60}{17}$ C) 12 D) $\frac{220}{17}$ E) 13

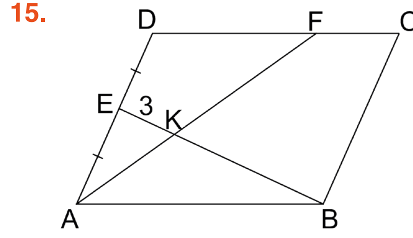
14. 

Bir belediye yukarıdaki şekilde verildiği gibi alt taban uzunluğu 13 m ve ikiz kenarları 4 m olan ikizkenar yamuk şeklinde üç parçayı aşağıdaki şekilde olduğu gibi birleştirerek bir park yapmak istemektedir.



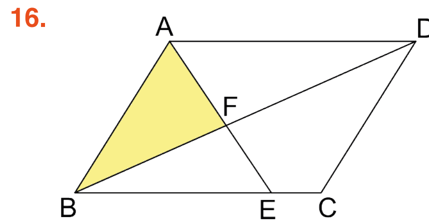
İkizkenar yamukların olduğu bölgeler yeşil alan olacağına göre parkın yeşil alan dışında kalan bölgesinin alanı kaç m^2 olacaktır?

A) $12\sqrt{3}$ B) $15\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{3}$ D) $22\sqrt{3}$ E) $27\sqrt{3}$

15. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $[EB] \cap [FA] = \{K\}$, $2 \cdot |FC| = |DF|$, $|DE| = |EA|$ ve $|EK| = 3$ cm olduğuna göre $|KB|$ kaç cm dir?

A) 9 B) $6\sqrt{2}$ C) 8 D) $5\sqrt{2}$ E) 7

16. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD paralelkenarında $[AE] \cap [BD] = \{F\}$, $3 \cdot |EC| = |BE|$ ve $A(\widehat{ABF}) = 24$ cm^2 olduğuna göre ABCD paralelkenarının alanı kaç cm^2 dir?

A) 105 B) 110 C) 112 D) 115 E) 124

17. ABCD paralelkenar olmak üzere

I. A ve B açılarına ait iç açıortaylar, paralelkenarın iç bölgesinde olan bir E noktasında kesişmektedir.

II. E noktasının $[AB]$ na uzaklığı 4 cm dir.

III. A noktası ile D noktası arası en kısa uzaklık 6 cm dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanı kaç cm^2 dir?

A) 46 B) 48 C) 50 D) 54 E) 56

DEĞERLENDİRME

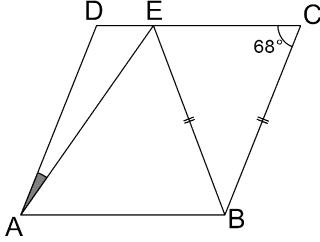
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

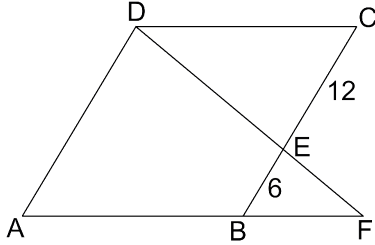
A) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

1.



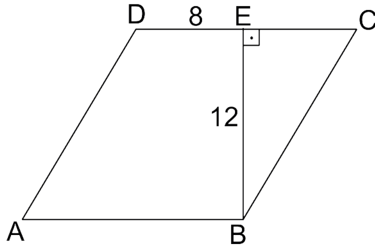
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|EB| = |BC|$ ve $m(\widehat{DCB}) = 68°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



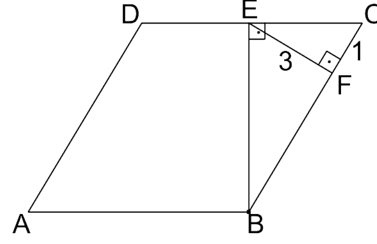
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde A, B, F ile D, E, F noktaları doğrusaldır. $|BE| = 6$ cm ve $|EC| = 12$ cm olduğuna göre $|AF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[DC] \perp [EB]$; $|DE| = 8$ cm, $|EB| = 12$ cm olduğuna göre eşkenar dörtgenin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[DC] \perp [EB]$, $[EF] \perp [BC]$; $|EF| = 3$ cm ve $|FC| = 1$ cm olduğuna göre eşkenar dörtgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5 - 7. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Hayvan üretme çiftliği sahibi Ahmet Bey kenar uzunlukları 300 metre ve 160 metre olan çevresi duvarlarla örülü dikdörtgen biçimindeki çiftlik içinde aşağıdaki bilgilere göre bölmeler yapıyor.

- İki direk, kısa kenarlara 60 ar metre, uzun kenarlara da eşit uzaklıkta olacak şekilde dikiliyor.
- Direkler arasına ve her bir direkten kendisine yakın olan 2 köşeye yere paralel olacak şekilde üçer sıra tel çekiliyor.
- Telin metre fiyatı 1 Türk lirasıdır.

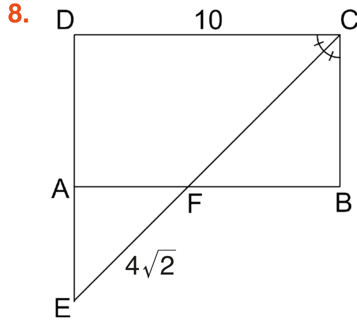
(Direğin kalınlığı önemsenmeyecektir.)

5. Oluşan **en büyük** 2 bölmenin alanlarının toplamını bulunuz.

6. Çekilen telin maliyetinin kaç Türk lirası olduğunu bulunuz.

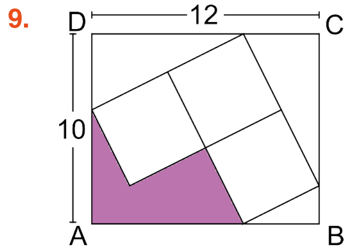
7. Tüm köşelere eşit uzaklıkta olan tek bir direk dikilerek bu direkten tüm köşelere üçer sıra tel çekilseydi telin maliyetinin ne kadar artacağını bulunuz.

B) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

8. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde D, A, E ile C, F, E noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB})$, $|DC| = 10$ cm ve $|EF| = 4\sqrt{2}$ cm olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

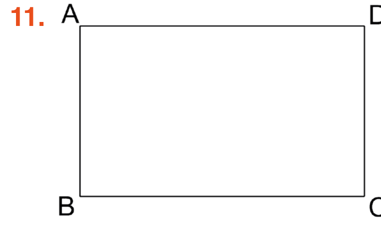
9. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninin içine şekildeki gibi üç tane eş kare yerleştirilmiştir. $|AD| = 10$ cm ve $|DC| = 12$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

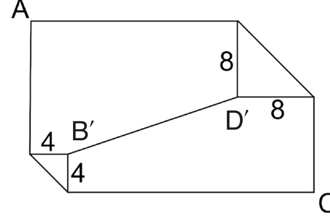
A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

10. ABCD dikdörtgeninde $2 \cdot |BC| = |AB|$; [BC] nın orta noktası E, [AE] nın orta noktası F ve $|EF| = \sqrt{17}$ cm olduğuna göre $|DF|$ kaç cm dir?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

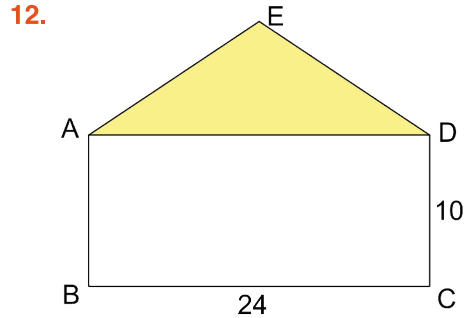
11. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $|BC| = 24$ cm, $|DC| = 17$ cm dir. Bu dikdörtgenin B ve D köşeleri aşağıdaki gibi katlanarak B′ ve D′ noktaları elde ediliyor.

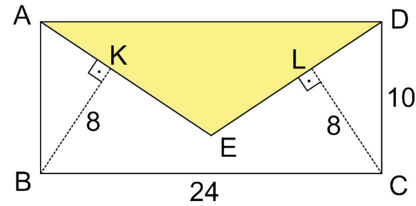


Buna göre $|B'D'|$ kaç cm dir?

A) $4\sqrt{5}$ B) 13 C) 12 D) $2\sqrt{5}$ E) 10

12. 

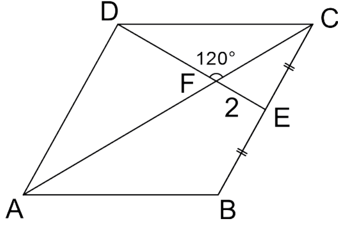
Yukarıda ABCD dikdörtgeni şeklindeki zarfta $|AE| = |ED|$, $|BC| = 24$ cm ve $|CD| = 10$ cm olmak üzere AED ikizkenar üçgen şeklindeki kapağı aşağıdaki gibi kapatılmıştır.



B ve C köşelerinin [AE] ve [DE] kenarlarına uzaklıkları 8 cm olduğuna göre K ile L noktaları arasındaki uzaklık kaç cm dir?

A) 12,8 B) 13,2 C) 14,4 D) 15,6 E) 16,2

13.



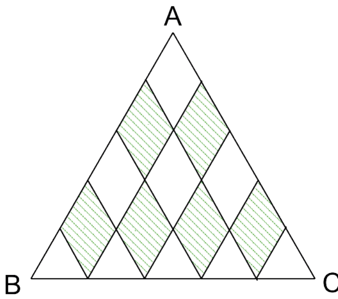
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $[DE] \cap [AC] = \{F\}$, $|BE| = |EC|$, $|EF| = 2$ cm ve $m(\widehat{DFC}) = 120^\circ$ olduğuna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) $24\sqrt{2}$ B) $20\sqrt{2}$ C) $25\sqrt{3}$ D) $24\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

14. Bir ABCD dikdörtgeninde $|AB| = 8\sqrt{3}$ cm ve $|BC| = 8$ cm dir. Bu dikdörtgenin $[BD]$ köşegeni üzerinde bir E noktası işaretleniyor. $[AE] \perp [BD]$ olduğuna göre E noktasının $[DC]$ na uzaklığı kaç cm dir?

A) 2 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 3 E) $2\sqrt{3}$

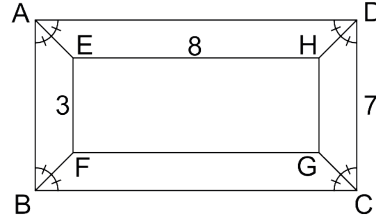
15.



Yukarıdaki şekilde bir kenarı 10 cm olan ABC eşkenar üçgeni içerisine şekildeki gibi eş eşkenar dörtgenler çizilmiştir. Buna göre boyalı eşkenar dörtgenlerin alanları toplamı kaç cm^2 dir?

A) 6 B) $8\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$ D) $15\sqrt{3}$ E) 18

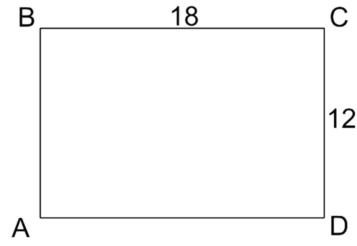
16.



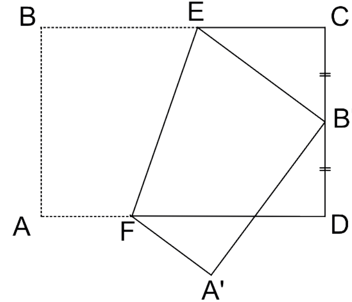
Yukarıdaki şekilde ABCD ve EFGH dikdörtgendir. $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ ve $[DH]$ açıortaylardır. $|EF| = 3$ cm, $|EH| = 8$ cm ve $|DC| = 7$ cm olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 70 B) 84 C) 98 D) 105 E) 120

17.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde $|BC| = 18$ cm ve $|DC| = 12$ cm dir. B köşesi $[EF]$ boyunca $[DC]$ nın orta noktası olan B' noktasının üzerine gelecek şekilde aşağıdaki gibi katlanıyor.



Buna göre $|AF|$ kaç cm dir?

A) $\frac{9}{2}$ B) 6 C) $\frac{15}{2}$ D) 8 E) 9

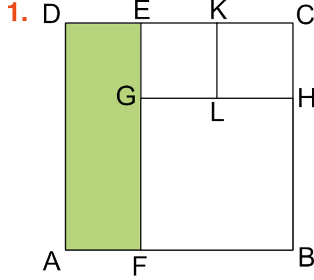
DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

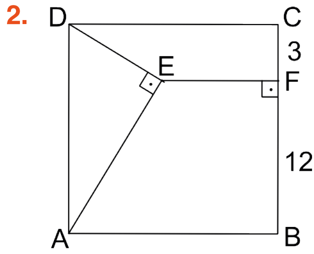


ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4

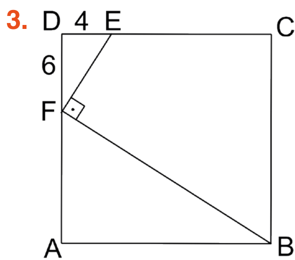
A) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

1. 

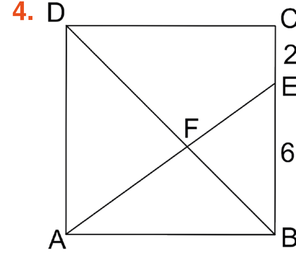
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinden boyalı AFED dikdörtgeni çıkarılınca geriye kalan parça GFBH karesi ile birbirine eş olan EGLK ve KLHC karesine bölünüyor. Buna göre $\frac{A(AFED)}{A(GFBH)}$ oranının kaç olduğunu bulunuz.

2. 

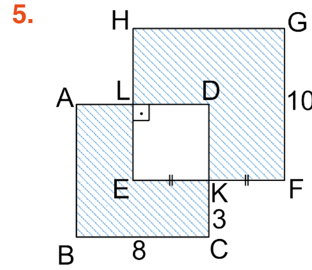
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $[DE] \perp [AE]$, $[EF] \perp [BC]$; $|CF| = 3$ cm, $|FB| = 12$ cm olduğuna göre $|EF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. 

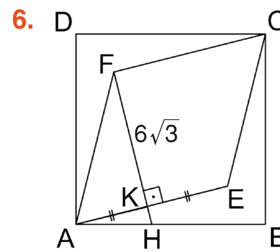
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $|DE| = 4$ cm, $|DF| = 6$ cm ve $[EF] \perp [FB]$ olduğuna göre $|EC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

4. 

Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde $[AE] \cap [BD] = \{F\}$, $|CE| = 2$ cm ve $|EB| = 6$ cm olduğuna göre $|EF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5. 

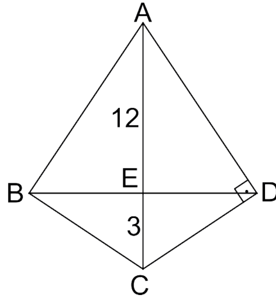
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD ve EFGH karesinde $[AD] \perp [HE]$; $|EK| = |KF|$; $|KC| = 3$ cm,
$|BC| = 8$ cm ve $|GF| = 10$ cm olduğuna göre boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. 

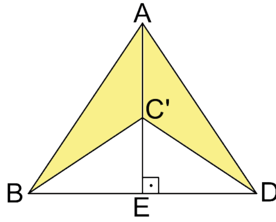
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD kare ve AECF eşkenar dörtgen ve F, K, H noktaları doğrusaldır. $[KF] \perp [AE]$, $|AK| = |KE|$ ve $|KF| = 6\sqrt{3}$ cm olduğuna göre ABCD karesinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

B) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

7.



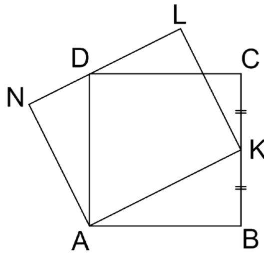
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD deltoidinde [AC] köşegen; [AD] ⊥ [DC]; |BC| = |CD|; |EC| = 3 cm, |AE| = 12 cm olup BCD üçgeni [BD] üzerinde katlanarak aşağıdaki şekil elde edilmiştir.



Buna göre ABC'D boyalı bölgesinin alanı kaç cm^2 dir?

A) 49 B) 52 C) 54 D) 56 E) 60

8.



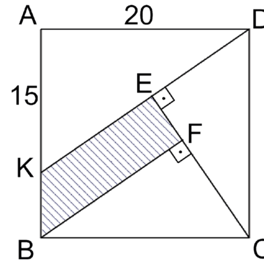
Yukarıdaki şekilde ABCD bir kare ve AKLN bir dikdörtgendir. N, D, L noktaları doğrusal ve |CK| = |KB| olduğuna göre AKLN dikdörtgeninin alanının ABCD karesinin alanına oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{6}{5}$ C) 2 D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{9}{5}$

9. ABCD bir kare ve |AB| = 6 cm olup AED üçgeninin alanı DEC üçgeninin alanının 2 katı olacak şekilde [AC] üzerinde alınan bir E noktasının B köşesine **en kısa** uzaklığı kaç cm dir?

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{5}$ E) 5

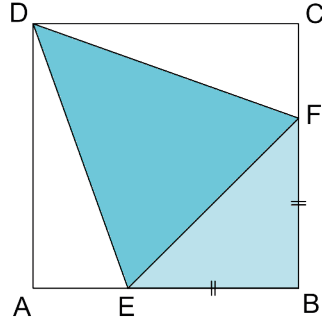
10.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde [KD] ⊥ [EC], [BF] ⊥ [EC]; |AD| = 20 cm ve |AK| = 15 cm veriliyor. Buna göre A(KEFB) kaç cm^2 dir?

A) 49 B) 51 C) 54 D) 58 E) 64

11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde |EB| = |BF| ve $2 \cdot A(\widehat{EBF}) = A(\widehat{DEF})$ olduğuna göre $\frac{|CF|}{|FB|}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

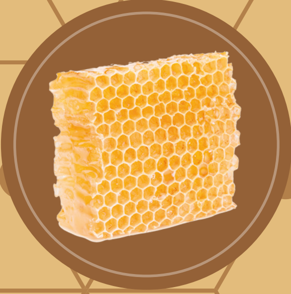
DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



GEOMETRİ

6







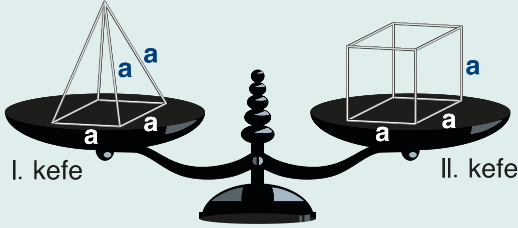
UZAY GEOMETRİ

10.6.1. Katı Cisimler



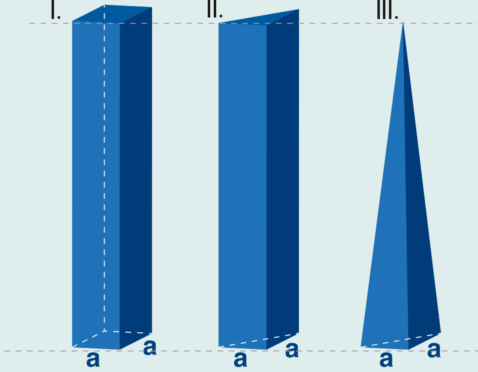
Hazırlık Çalışması

1.



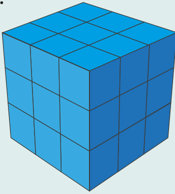
Yandaki eşit kollu terazide verilen özdeş telden yapılmış piramit ve prizma şeklindeki cisimlerin ayrıt uzunlukları eşittir. Buna göre terazinin hangi kefesinin aşağıya doğru hareket edeceğini bulunuz.

2.

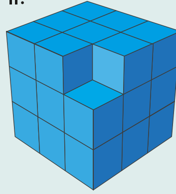


Eğitim amaçlı oyun kalıpları üreten bir firma yükseklikleri eşit olan yandaki kalıpları üretmektedir. I. kalıp, tabanı kare olan bir prizma; II. kalıp, tabanı ikizkenar dik üçgen olan bir prizma ve III. kalıp, tabanı ikizkenar dik üçgen olan bir piramittir. Bu kalıplardan hangisinin hacminin daha büyük olduğunu bulunuz.

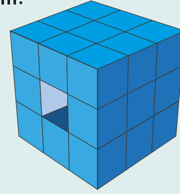
3. I.



II.



III.



Yukarıda I. şekildeki küpün bir köşesinden küçük bir küp çıkarılırsa II. şekildeki küp, ortasından küçük bir küp çıkarılırsa III. şekildeki küp elde edilmektedir. Buna göre bu üç şeklin de dış yüzeyleri boyanmak istendiğinde hangi şeklin boyanacak kısmının daha fazla olacağını bulunuz.

10.6. UZAY GEOMETRİ





Günlük hayatı kolaylaştıran birçok ürünün ve yaşam alanlarının şekil olarak prizma veya piramitten esinlenilerek yapıldığı görülmektedir. Örneğin elbiselerinizi yerleştirdiğiniz dolap, içtiğiniz sütün veya ilacın kutusu, çocuklarınızın oynadığı çadır, yiyeceklerinizi korumak için kullandığınız buzdolabı, çamaşırlarınızı yıkadığınız çamaşır makinesi ve daha birçok araç gereç prizma şeklindedir. Günlük hayatta büyük yer kaplayan iş merkezlerinin, yaşanılan binaların ve alışveriş merkezlerinin prizma şeklinden oluştuğu bilinmektedir.

Mısır'da yer alan antik yapılar, Paris'te Louvre (Luvr) Müzesi önündeki cam yapı, Antalya'da hizmet veren Cam Piramit Fuar ve Kongre Merkezi piramitlere örnek verilebilecek yapılardır.

Bu bölümde prizmalar ve piramitler ile bu şekillerin özelliklerini inceleyeceksiniz.

10.6.1. Katı Cisimler

Terimler ve Kavramlar

- Dik Prizma
- Dik Piramit
- Yükseklik
- Taban Alanı
- Yüzey Alanı
- Yanal Alan
- Hacim



Neler Öğreneceksiniz?

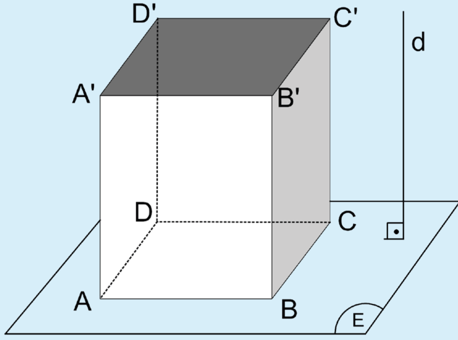
- Dik prizmalar ve dik piramitlerin uzunluk, alan ve hacim bağıntılarını oluşturmayı öğreneceksiniz.

10.6.1.1. Dik Prizma ve Dik Piramit

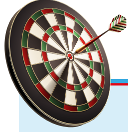
Dik Prizma



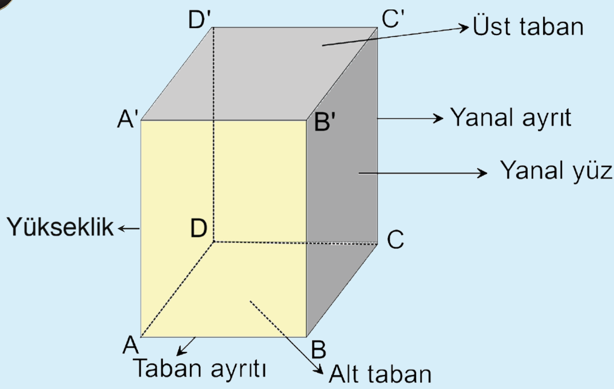
Bilgi



ABCD çokgeni, şekildeki E düzlemi üzerinde ve d doğrusu E düzlemine dik bir doğru olarak verilsin. Bu ABCD çokgeni üzerindeki noktalardan geçen ve d doğrusuna paralel olan doğruların oluşturduğu ve iki paralel düzlem ile sınırlanan kapalı bölgeye **dik prizma** denir.



Bilgi

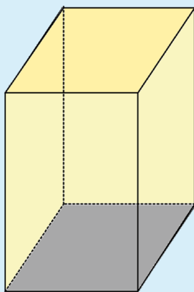


Yandaki dik prizmanın altını ve üstünü oluşturan ABCD ve A′B′C′D′ çokgensel bölgelerine dik prizmanın sırasıyla **alt tabanı** ve **üst tabanı** denir. Prizmanın taban kenarlarına **taban ayrıtları**, tabanların karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçalarına **yanal ayrıtlar**, iki yanal ayrıt arasında kalan bölgelere **yanal yüzler**, iki taban arasındaki uzaklığa **yükseklik** denir.

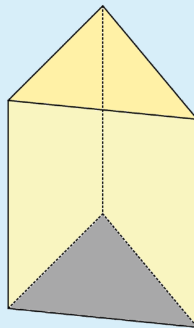


Bilgi

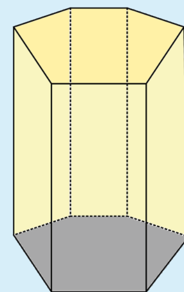
Dik prizmalar tabanını oluşturan çokgene göre isimlendirilir.



Tabanı dörtgen ise dörtgen dik prizmadır.



Tabanı üçgen ise üçgen dik prizmadır.

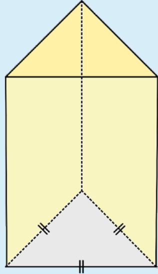


Tabanı altıgen ise altıgen dik prizmadır.

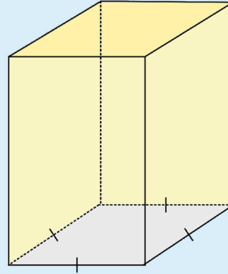


Bilgi

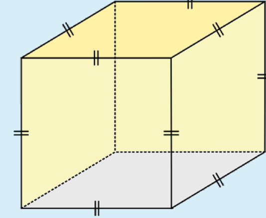
Dik prizmanın yanal ayrıtları aynı zamanda dik prizmanın yüksekliğidir. Dik prizmanın yanal yüzleri dikdörtgensel bölgedir. Tabanları düzgün çokgen olan prizmaya **düzgün prizma** denir.



Eşkenar üçgen dik prizma
(Düzgün prizma)



Kare dik prizma
(Düzgün prizma)



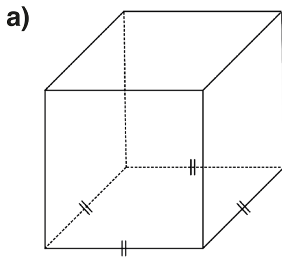
Tüm ayrıtları eşit olan
kare prizma (Küp)
(Düzgün prizma)



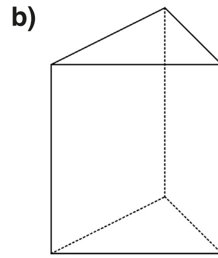
Örnek 1

Aşağıda verilen dik prizmaların adlarını, düzgün prizma olup olmadıklarını belirterek ayrıt sayılarını ve yüzey sayılarını bulunuz.

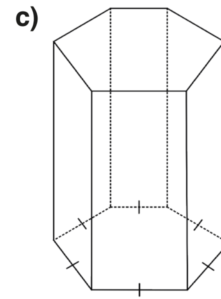
a)



b)



c)

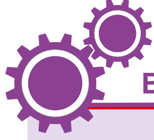




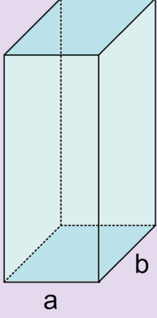
Çözüm

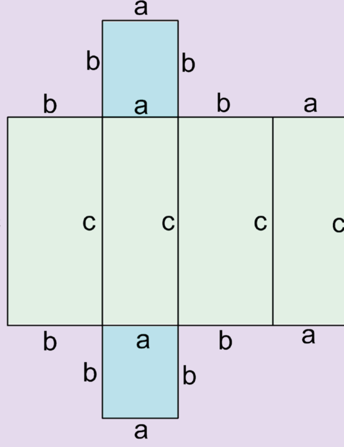
Yukarıda a, b ve c şekillerinde verilen prizmaların özellikleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Şekiller / **Özellikler**	**a)**	**b)**	**c)**
Prizmanın adı	Kare dik prizma	Üçgen dik prizma	Düzgün altıgen dik prizma
Düzgün prizma olup olmadığı	Düzgün prizma	Düzgün prizma değil	Düzgün prizma
Ayrıt sayısı	12	9	18
Yüzey sayısı	6	5	8



Buluyorum





Yandaki şekilde bir dikdörtgenler prizması ve açınımı verilmiştir. Bu dikdörtgenler prizmasının yanal yüzeyleri olan dikdörtgenlerin alanları toplamı prizmanın yanal alanına eşittir. Yandaki dikdörtgenler prizmasının yanal alanı

$$b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot c = (b + a + b + a) \cdot c$$

$$= \underbrace{(2a + 2b)}_{\text{Taban çevresi}} \cdot \underbrace{c}_{\text{Yükseklik}} \text{ olur.}$$

Buradan bir **dik prizmanın yanal alanı, taban çevresi ile yüksekliğinin çarpımıdır.**

Yukarıda verilen dikdörtgenler prizmasının her bir tabanının alanı $a \cdot b$ dir. Tabanlarının alanları toplamı $2ab$ olur. Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı, yanal alanı ile iki taban alanının toplamına eşittir. Ayrıtları a, b ve c birim olan yukarıdaki dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı,

$$\underbrace{(2a + 2b) \cdot c}_{\text{Yanal alan}} + \underbrace{2ab}_{\text{Taban alanları toplamı}} = 2(ac + bc + ab) \text{ olur.}$$

Buradan bir **dik prizmanın yüzey alanı, yanal alanı ile taban alanları toplamıdır.**

Birim küplerle oluşan prizmalar				
Prizmayı oluşturan birim küp sayısı	1	6	12	24
Prizmanın hacmi	1	6	12	24
Prizmanın taban alanı	1	6	6	6
Prizmanın yüksekliği	1	1	2	4
Prizmanın taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı	$1 \cdot 1 = 1$	$6 \cdot 1 = 6$	$6 \cdot 2 = 12$	$6 \cdot 4 = 24$

Yukarıdaki tablo incelendiğinde birim küplerle oluşturulan prizmaların taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının prizmanın hacmine eşit olduğu görülür.
Buradan ayrıtları a, b ve c birim olan bir **dikdörtgenler prizmasının hacmi a • b • c** olur.

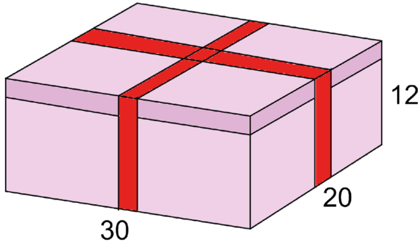


Örnek 2

Ayrıt uzunlukları 12 cm, 20 cm ve 30 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir hediye kutusunun hacminin kaç cm^3 ve yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

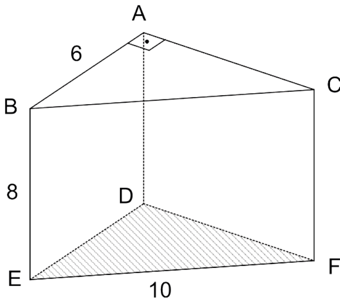


Dikdörtgenler prizması şeklindeki hediye kutusu yandaki gibi verilsin. Bu prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olduğundan $12 \cdot 20 \cdot 30 = 7200\ \text{cm}^3$ olur.
Prizmanın yüzey alanı,

$$2 \cdot (12 \cdot 20 + 12 \cdot 30 + 20 \cdot 30) = 2 \cdot (240 + 360 + 600)$$
$$= 2 \cdot 1200$$
$$= 2400\ \text{cm}^2 \text{ bulunur.}$$



Örnek 3



Yandaki şekilde verilen üçgen dik prizmada $[BA] \perp [AC]$; $|AB| = 6\ \text{cm}$, $|BE| = 8\ \text{cm}$ ve $|EF| = 10\ \text{cm}$ olduğuna göre prizmanın hacminin kaç cm^3 ve yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

Şekildeki dik prizmada $[AB] \perp [AC]$ ve $|EF| = |BC| = 10\ \text{cm}$ olduğundan 6 birim - 8 birim - 10 birim dik üçgeni kullanılarak $|AC| = 8\ \text{cm}$ bulunur. Dik prizmanın hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımına eşit olduğundan prizmanın hacmi $\frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 8 = 24 \cdot 8 = 192\ \text{cm}^3$ olur. Prizmanın yanal alanı taban çevresi ile yüksekliğin çarpımı olduğundan prizmanın yanal alanı $(6 + 8 + 10) \cdot 8 = 24 \cdot 8 = 192\ \text{cm}^2$ olarak bulunur.

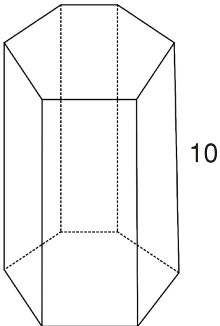


Örnek 4

Taban alanı $24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ ve yüksekliği 10 cm olan bir düzgün altıgen dik prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



Çözüm

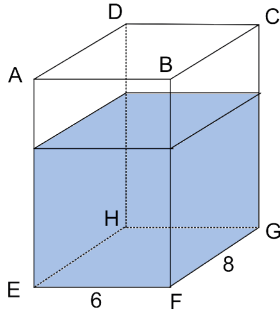


Prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğundan

$$\underbrace{24\sqrt{3}}_{\text{Taban alanı}} \cdot \underbrace{10}_{\text{Yükseklik}} = 240\sqrt{3}\ \text{cm}^3 \text{ bulunur.}$$



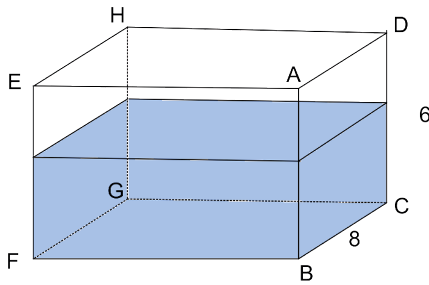
Örnek 5



Yanda verilen dikdörtgenler prizması şeklindeki kabın $\frac{2}{3}$ si su ile doludur. $|EF| = 6$ cm ve $|FG| = 8$ cm olmak üzere bu kap FBCG yüzeyi üzerine yatırılırsa suyun yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.



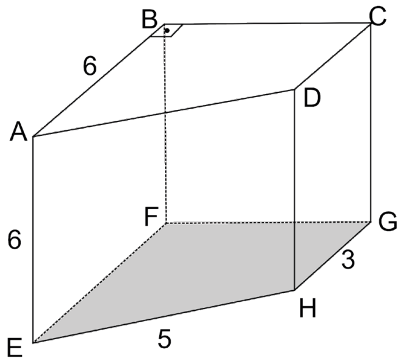
Çözüm



Kap FBCG yüzeyi üzerine şekildeki gibi yatırılsın. Kabın içindeki suyun hacmi değişmemiş sadece şekli değişmiştir. Dolayısıyla kabın yine $\frac{2}{3}$ si su ile doludur. Bu da suyun yüksekliğinin kabın bu durumdaki yüksekliğine oranını verir. Kabın bu durumdaki yüksekliği 6 cm olup suyun yüksekliğine x denilirse $\frac{x}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 4$ cm olarak bulunur.



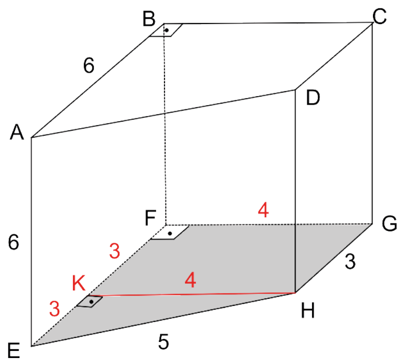
Örnek 6



Yandaki şekilde verilen tabanı dik yamuk olan dik prizmada $[AB] \parallel [DC]$; $[AB] \perp [BC]$; $|AB| = 6$ cm, $|AE| = 6$ cm, $|EH| = 5$ cm ve $|HG| = 3$ cm olmak üzere prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



Çözüm



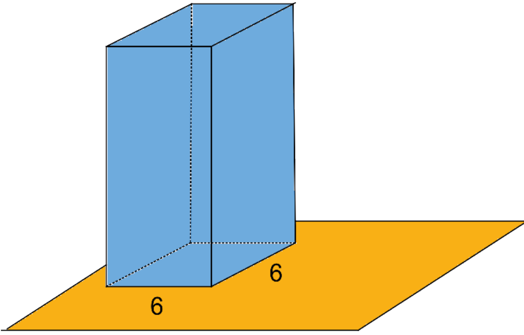
Dik prizmada alt ve üst tabanlar eş olduğundan $|FE| = |BA| = 6$ cm olur. EFGH dik yamuğunda $[HK] \perp [EF]$ olacak şekilde $[HK]$ çizilirse EKH dik üçgeni ve FKHG dikdörtgeni elde edilir. Dikdörtgenin karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan $|HG| = |KF| = 3$ cm olur. Buradan $|FK| = |FE| - |EK| = 6 - 3 = 3$ cm olur. EKH dik üçgeninde Pisagor teoremi ile $|HK| = 4$ cm olur. Buradan prizmanın taban alanı

$$A(EFGH) = \frac{(6+3)\cdot 4}{2} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

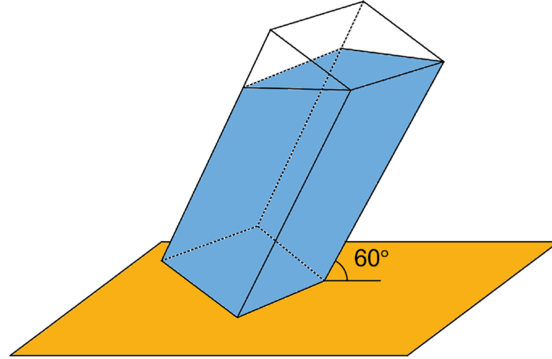
Prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğundan Hacim $= A(EFGH) \cdot |AE| = 18 \cdot 6 = 108$ cm^3 olarak bulunur.



Örnek 8



Şekil I

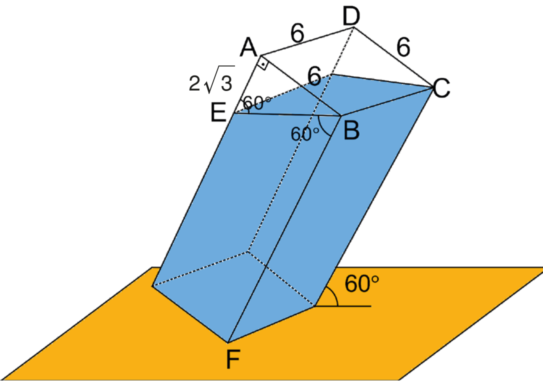


Şekil II

Şekil I de tamamen su dolu, üstü açık, kare dik prizma şeklinde verilen kabın taban ayrıt uzunluğu 6 cm dir. Bu kap Şekil II deki gibi yatay düzlemle 60° açı yapacak şekilde eğiliyor ve kaptan bir miktar su dökülüyor. Dökülen suyun hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



Çözüm

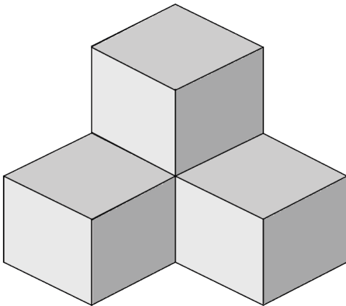


Şekildeki prizmada $[EB]$ taban düzlemine paralel olduğundan $m(\widehat{EBF}) = 60^\circ$ ve $[AE] \parallel [BF]$ olduğundan $m(\widehat{AEB}) = 60^\circ$ olur. AEB üçgeninde 60° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğu $|AB| = 6$ cm ve 30° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğu $|AE| = 2\sqrt{3}$ cm olur.
Dökülen suyun hacmi ile prizmada boş kalan kısmın hacmi aynı olacağından boşluğun hacmi üçgen prizmanın hacmine eşit olur. Prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olduğundan

$\dfrac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}\ cm^3$ bulunur.



Örnek 9



Bir ayrıtı 2 m olan küp şeklindeki 4 kutu şekildeki gibi yerleştirilmiştir. Bu kutularla oluşturulan şeklin tüm yüzeyi bir kumaşla kaplanmak isteniyor. Buna göre bu şekil için **en az** kaç m^2 kumaş gerektiğini bulunuz.

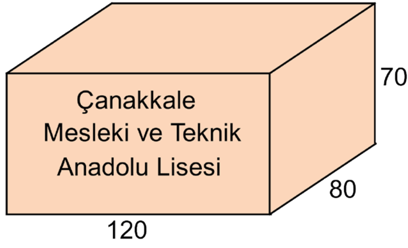


Çözüm

Küp biçimindeki kutuların yerleştirilmesiyle oluşan şeklin yüzeyleri sayıldığında toplam 18 yüzey olduğu görülür. Bir yüzeyin alanı $2^2 = 4\ m^2$ olduğundan şeklin tüm yüzeyinin alanı $18 \cdot 4 = 72\ m^2$ olur. Buradan şeklin tüm yüzeyini kaplamak için gereken kumaş en az $72\ m^2$ olarak bulunur.



Örnek 10



Çanakkale Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi 10. sınıfında okuyan Serkan, bilim projesi için yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi dikdörtgenler prizması şeklinde bir stant yaptırmıştır. Standın boyutları 70 cm, 80 cm ve 120 cm dir. Standın daha çok ilgi çekmesi için bütün ayrıtlarını bir sıra şerit led lamba ile süsleyecektir. Buna göre Serkan'ın kaç cm şerit led lambaya ihtiyacı olduğunu bulunuz.

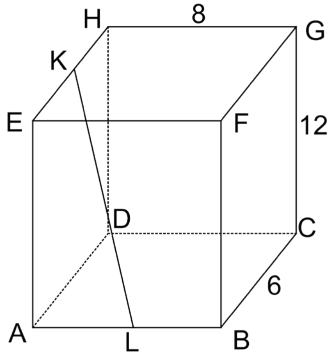


Çözüm

Serkan'ın yaptırdığı standın farklı ayrıtlarının her birinden dörder tane olduğundan standın ayrıt uzunlukları toplamı $4 \cdot (70 + 80 + 120) = 4 \cdot 270 = 1080$ cm olur.
Buradan Serkan'ın ihtiyacı olan şerit led lambanın uzunluğu 1080 cm olarak bulunur.



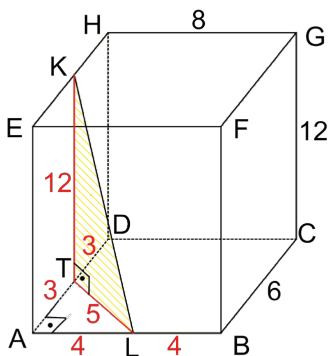
Örnek 11



Yandaki şekilde verilen dikdörtgenler prizmasında $|HK| = |KE|$, $|AL| = |LB|$; $|BC| = 6$ cm, $|GC| = 12$ cm ve $|HG| = 8$ cm olduğuna göre $|KL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



K ve L orta noktalar olduğundan $|HK| = |KE| = 3$ cm ve $|AL| = |LB| = 4$ cm olur. K noktasından $[AD]$ na dik olacak şekilde $[KT]$ çizilirse $|AT| = |TD| = 3$ cm ve $|KT| = 12$ cm olur. ATL dik üçgeninde Pisagor teoremi ile $|TL| = 5$ cm bulunur. $[KT] \perp [TL]$ olduğundan KTL dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|KL|^2 = |KT|^2 + |TL|^2$

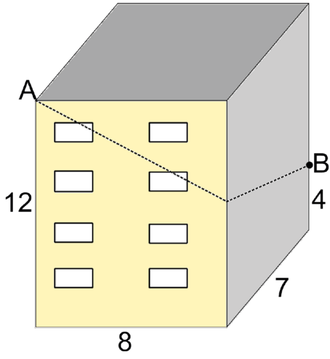
$|KL|^2 = 12^2 + 5^2$

$|KL|^2 = 169$

$|KL| = 13$ cm olarak bulunur.



Örnek 12

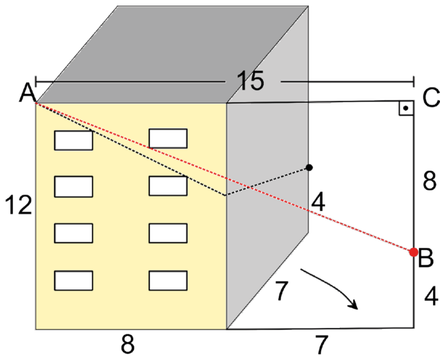


Yandaki şekilde yüksekliği 12 m olan dikdörtgenler prizması biçiminde bir bina verilmiştir. A noktasında bir televizyon anteni ve yerden 4 m yükseklikteki bir B noktasında bir televizyonun kablo girişi bulunmaktadır.

A ile B noktaları arasında, binanın yüzeyi üzerinden kablo ile bağlantı yapılmak isteniyor. Buna göre **en az** kaç metre kabloya ihtiyaç olduğunu bulunuz.



Çözüm



Kablo, binanın ön yüzü ile sağ yan yüzeyi üzerinden geçeceğinden A ile B noktaları arasındaki uzaklığın en az olması için A ile B aynı düzlemde düşünülmelidir. Binanın sağ yan yüzeyinin yanda verilen şekildeki gibi ok yönünde açıldığı düşünülür ve A, B, C noktaları aynı düzlemde olup $[AB]$ çizilirse A ile B noktaları arası en kısa uzaklık $|AB|$ olur. ACB dik üçgeninde $|CB| = 8$ m ve $|AC| = 15$ m olur. ACB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$

$|AB|^2 = 15^2 + 8^2$

$|AB|^2 = 289$

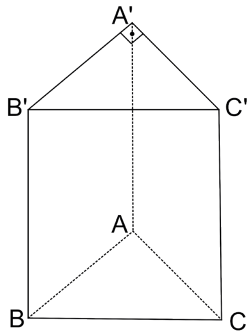
$|AB| = 17$ m olur.

Buradan gerekli olan kablonun en az 17 m olması gerektiği bulunur.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekilde verilen üçgen dik prizmada $[AB] \perp [AC]$; $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $|CC'| = 12$ cm olduğuna göre

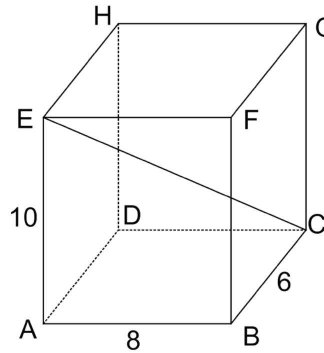


a) Prizmanın yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

b) Prizmanın tüm yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

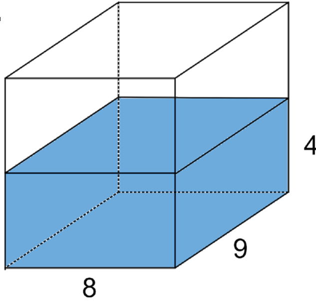
c) Prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

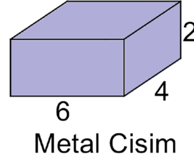
2.



Yandaki şekilde boyutları 6 cm, 8 cm ve 10 cm olan dikdörtgenler prizmasında $|EC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.

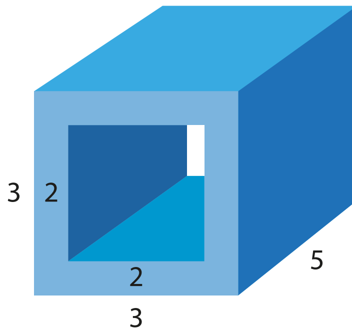




Yukarıdaki şekilde taban ayrıtları 8 cm ve 9 cm olan dikdörtgenler prizması içerisinde 4 cm yüksekliğinde su bulunmaktadır. Ayrıtları 2 cm, 4 cm, 6 cm olan dikdörtgenler prizması şeklinde bir metal cisim suya bırakılıyor ve tamamen suya batıyor.
Buna göre su seviyesinin kaç cm yükseleceğini bulunuz.

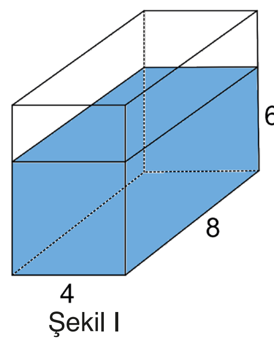
4. Bir fabrikada yardım derneği için üretilen ürünler boyutları 3 cm, 5 cm ve 10 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutulara; kutular ise bir ayrıtı 30 cm olan küp şeklindeki kolilere boşluk kalmayacak şekilde konulacaktır. Bu fabrikada çalışan Beyza Hanım, kutulara konulmuş ürünleri bir koliye 6 dakikada yerleştiriyor. Fabrika yönetimi kolilerin boyutlarını 20 cm, 30 cm ve 40 cm olarak değiştiriyor.
Buna göre Beyza Hanım'ın yeni kolilerden birini yine aynı kutuları kullanarak kaç saniye daha erken yerleştireceğini bulunuz.

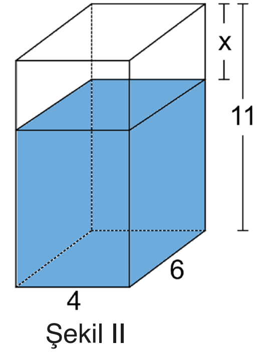
5.



Yukarıdaki şekilde boyutları 3 m, 3 m ve 5 m olan kare prizma şeklindeki bir kanalizasyon borusunun içi şekildeki gibi 2 m, 2m ve 5 m boyutlarında kare prizması şeklinde boş bırakılmıştır. Bu borunun iç ve dış yüzeyi su sızdırmaması için özel bir boya ile kaplanarak izole edilecektir.
Buna göre boyanacak yüzeylerin alanları toplamının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

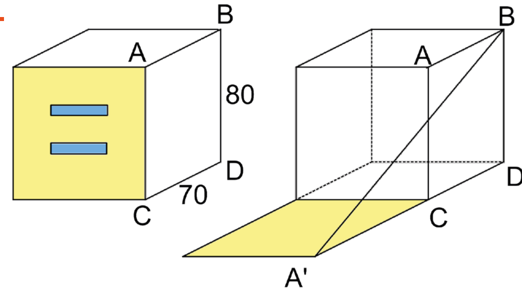
6.





Şekil I de taban ayrıtları 4 cm ve 8 cm olan dikdörtgenler prizmasında 6 cm yüksekliğinde bulunan su, şekil II de taban ayrıtları 4 cm, 6 cm ve yüksekliği 11 cm olan kaba boşaltılıyor. Şekil II deki kabın boş kalan kısmının yüksekliği x olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

7.

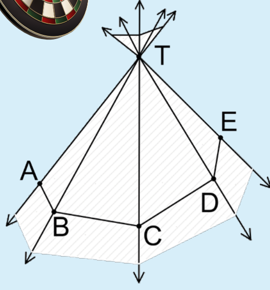


Yukarıdaki şekilde $|CD| = 70$ cm ve $|BD| = 80$ cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir dolabın ön yüzündeki kapağın A köşesi ile arka yüzündeki B köşesi tel ile bağlanmıştır. Dolabın kapağı açıldığında şekildeki gibi A noktası A' noktasına gelip ve $[AC] \perp [A'C]$ olacak şekilde tel gergin olarak durmaktadır.
Buna göre A' ile B arasındaki telin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Dik Piramit

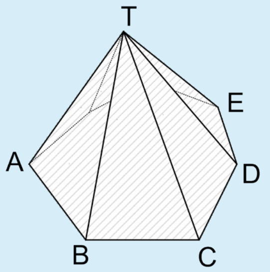


Bilgi



Bir çokgen ile bu çokgenin düzlemi dışında bir T noktası alınsın. Çokgene ait noktalarla T noktasından geçen doğruların kümesine **piramidal yüzey** denir. Şekilde ABCDE... çokgeni ile T noktasının belirttiği piramidal yüzeyin T noktasına **tepe noktası** denir.

Bir piramidal yüzeyin yanal yüzeyini ve bütün ayrıtlarını kesen bir düzlemle sınırlanan katı cisme **piramit** denir. Şekildeki piramit (T, ABCDE ...) ile gösterilir.



Tepe noktası ile çokgene ait herhangi bir kenarın tüm noktalarını birleştiren doğru parçaları üçgensel bölge oluşturur ve bu üçgensel bölgelerin tümüne **yanal yüzey** denir. Şekilde TAB, TBC, TCD, TDE, ... üçgenleri piramidin yanal yüzleridir.

Piramitler tabanındaki çokgenin kenar sayısına göre isimlendirilir: üçgen piramit, dörtgen piramit, beşgen piramit, altıgen piramit ...
[TA], [TB], [TC], [TD], [TE], ...piramidin yanal ayrıtları;
[AB], [BC], [CD], [DE], ... taban ayrıtları olarak adlandırılır.

Tepe noktası ile piramidin tabanı olan çokgenin ağırlık merkezini birleştiren doğru parçası çokgenin düzlemine dik ise bu piramitlere **dik piramit** ve bu doğru parçasının uzunluğuna ise dik piramidin **yüksekliği** denir.

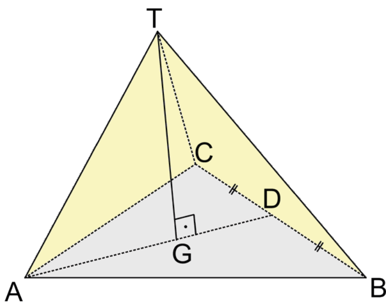


Örnek 13

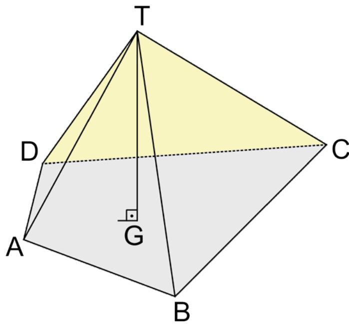
Üçgen, dörtgen ve altıgen dik piramitler çizerek bu piramitlerin ayrıtlarını, yüksekliklerini ve yanal yüzlerini belirleyiniz.



Çözüm

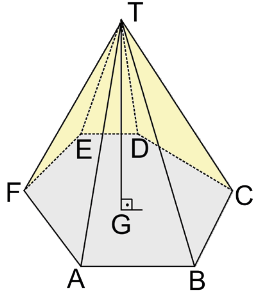


Şekildeki üçgen dik piramitte G noktası üçgenin ağırlık merkezidir. Bu durumda [TG] piramidin yüksekliği, $\widehat{ABC}$ piramidin tabanı, $\widehat{TAB}$, $\widehat{TAC}$ ve $\widehat{TBC}$ ise piramidin yanal yüzleridir. Piramidin yanal ayrıtları ise [TA], [TB] ve [TC] olur. Bu piramit $(T, \widehat{ABC})$ ile gösterilir.



Şekildeki dörtgen dik piramitte G noktası, ABCD dörtgeninin ağırlık merkezidir. Bu durumda [TG] piramidin yüksekliği; ABCD dörtgeni piramidin tabanı; $\widehat{TAB}$, $\widehat{TBC}$, $\widehat{TCD}$ ve $\widehat{TDA}$ ise piramidin yanal yüzleridir.

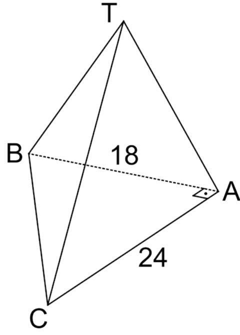
Piramidin yanal ayrıtları ise [TA], [TB], [TC] ve [TD] olur. Bu piramit (T, ABCD) ile gösterilir.



Şekildeki altıgen dik piramitte G noktası altıgenin ağırlık merkezidir. Bu durumda $[TG]$ piramidin yüksekliği; ABCDEF altıgeni piramidin tabanı; $\widehat{TAB}$, $\widehat{TBC}$, $\widehat{TCD}$, $\widehat{TDE}$, $\widehat{TEF}$ ve $\widehat{TFA}$ ise piramidin yanal yüzleridir. Piramidin yanal ayrıtları ise $[TA]$, $[TB]$, $[TC]$, $[TD]$, $[TE]$ ve $[TF]$ olur. Bu piramit $(T,\ ABCDEF)$ ile gösterilir.



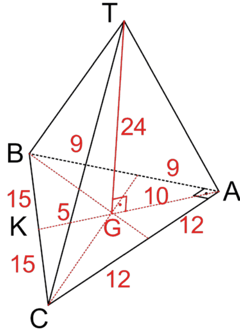
Örnek 14



Yandaki şekilde verilen üçgen dik piramitte $[BA] \perp [AC]$; $|AB| = 18$ cm, $|AC| = 24$ cm ve piramidin yüksekliği 24 cm olduğuna göre $[TA]$ ayrıtının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



Piramidin tabanı olan ABC dik üçgeninde kenarortaylar çizilsin ve kenarortayların kesim noktasına G noktası denilsin. $[TG]$, $\widehat{ABC}$ nin bulunduğu düzleme diktir. Bu durumda $[TG] \perp [AG]$, $[TG] \perp [BG]$ ve $[TG] \perp [CG]$ olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanılarak

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

$|BC|^2 = 18^2 + 24^2 = 30^2$

$|BC| = 30$ cm olur.

ABC dik üçgeninde dik açının bulunduğu köşeden hipotenüse indirilen kenarortay uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşit olur. G noktası ağırlık merkezi olduğundan $|GK| = 5$ cm ve $|AG| = 10$ cm olur.

TGA dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanılarak

$|TA|^2 = |AG|^2 + |TG|^2 \Rightarrow |TA|^2 = 10^2 + 24^2$

$\Rightarrow |TA|^2 = 100 + 576$

$\Rightarrow |TA|^2 = 676$

$\Rightarrow |TA| = 26$ cm bulunur.



Bilgi

Tabanı düzgün çokgen olan dik piramitlere **düzgün piramit** denir. Düzgün piramitte yanal ayrıtlar eştir. Bu durumda yan yüzler birbirine eş ikizkenar üçgen belirtirler.

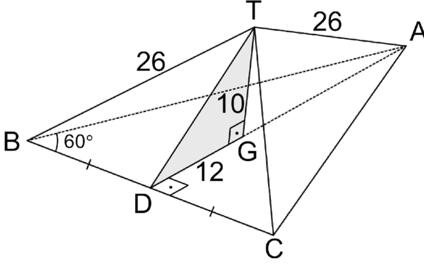


Örnek 15

Tabanı ABC eşkenar üçgen ve tepe noktası T olan $(T, \widehat{ABC})$ düzgün piramidinde $|TA| = 26$ cm ve piramidin yüksekliği 10 cm olduğuna göre piramidin bir yan yüzeyinin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



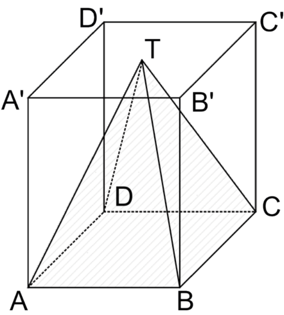
Düzgün piramidin yanal ayrıtları eş olduğundan $|TA| = |TB| = |TC| = 26$ cm olur.
Piramidin yüksekliği 10 cm olduğuna göre $|TG| = 10$ cm olur.
$[TG]$, eşkenar üçgenin düzlemine dik olduğundan $[TG] \perp [CG]$ olur.
Buradan $\widehat{TGC}$ nin dik üçgen olduğu görülür ve 5 birim - 12 birim - 13 birim üçgeni yardımıyla $|CG| = 24$ cm bulunur. O hâlde $|CG| = |AG| = 24$ cm olup G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan $|GD| = 12$ cm elde edilir.
Sonuç olarak $\widehat{TGD}$ dik üçgendir. Pisagor teoremi ile $|TD|^2 = |TG|^2 + |GD|^2$

$$|TD|^2 = 10^2 + 12^2$$
$$|TD|^2 = 100 + 144$$
$$|TD|^2 = 244$$
$$|TD| = 2\sqrt{61} \text{ cm bulunur.}$$

Düzgün piramitlerin tüm yan yüzleri eş olduğundan her bir yan yüzeyin yüksekliği $2\sqrt{61}$ cm dir.



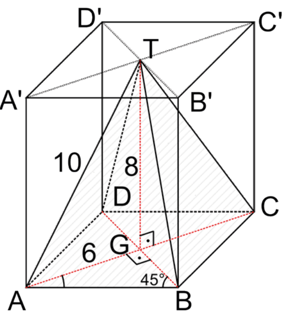
Örnek 16



Yandaki şekildeki düzgün kare prizmanın üst tabanının ağırlık merkezi T noktasıdır. $|AB| = 6\sqrt{2}$ cm ve düzgün kare piramit olan $(T, ABCD)$ nin bir yanal ayrıtının uzunluğu 10 cm olduğuna göre prizmanın yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



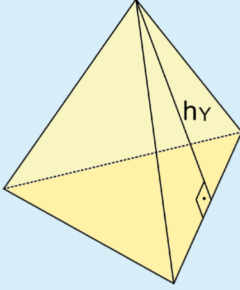
T noktası, $A'B'C'D'$ karesinin ağırlık merkezi ise $[A'C']$ ve $[B'D']$ nın kesişimi olan noktadır. Verilen şekil düzgün kare prizma olduğundan $[TG]$ nın uç noktalarından olan G noktası ABCD karesinin ağırlık merkezidir. Buradan $[TG] \parallel [BB']$ ve $|TG| = |BB'|$ elde edilir.

ABCD kare ise $[AG] \perp [BG]$ ve $|AG| = |BG|$ olur ve açıları 45°, 45°, 90° olan dik üçgen yardımıyla $|AG| = |BG| = 6$ cm bulunur.
$[TG]$, ABCD karesinin düzlemine dik olduğundan $\widehat{TGA}$ dik üçgen olur ve 3 birim - 4 birim - 5 birim üçgeni yardımıyla $|TG| = 8$ cm bulunur.

Buradan, verilen prizmanın yüksekliği yanal ayrıt uzunluklarına eşit olduğundan $|BB'| = |TG| = 8$ cm elde edilir.



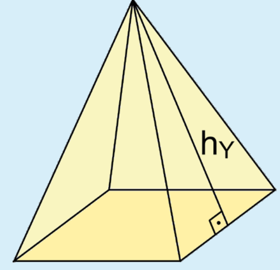
Bilgi



Bir düzgün piramidin yan yüzleri olan eş üçgenlerin alanları toplamına piramidin **yanal alanı** denir.

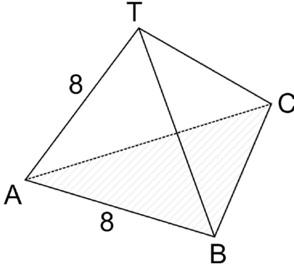
Bir piramidin taban alanı ile yanal alanı toplamına piramidin **yüzey alanı** denir.

Toplam alan A , taban alanı A_T , yanal alan A_Y, taban çevresi $Ç_T$, yan yüz yüksekliği h_Y olmak üzere $A_Y = \dfrac{Ç_T \cdot h_Y}{2}$ ve $A = A_T + A_Y$ olur.





Örnek 17



Yandaki şekildeki $(T, \widehat{ABC})$ düzgün piramidinde $|AB| = |TA| = 8$ cm olduğuna göre bu piramidin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



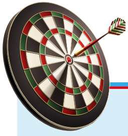
Çözüm

Düzgün piramidin tabanı düzgün çokgen olduğundan ABC eşkenar üçgendir. Bu durumda $|AB| = |AC| = |BC| = 8$ cm olur.

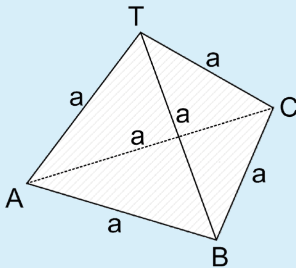
Düzgün piramidin yanal ayrıt uzunlukları eşit olduğundan $|TA| = |TB| = |TC| = 8$ cm olur.
Bu durumda $\widehat{ABC}$, $\widehat{TBA}$, $\widehat{TCA}$ ve $\widehat{TBC}$ kenar uzunlukları 8 cm olan eşkenar üçgenlerdir. Bir kenar uzunluğu a cm olan eşkenar üçgenin alanı $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ cm^2 olduğundan piramidin yüzey alanı,

$$A = A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{TBA}) + A(\widehat{TCA}) + (\widehat{TBC}) = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 4 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



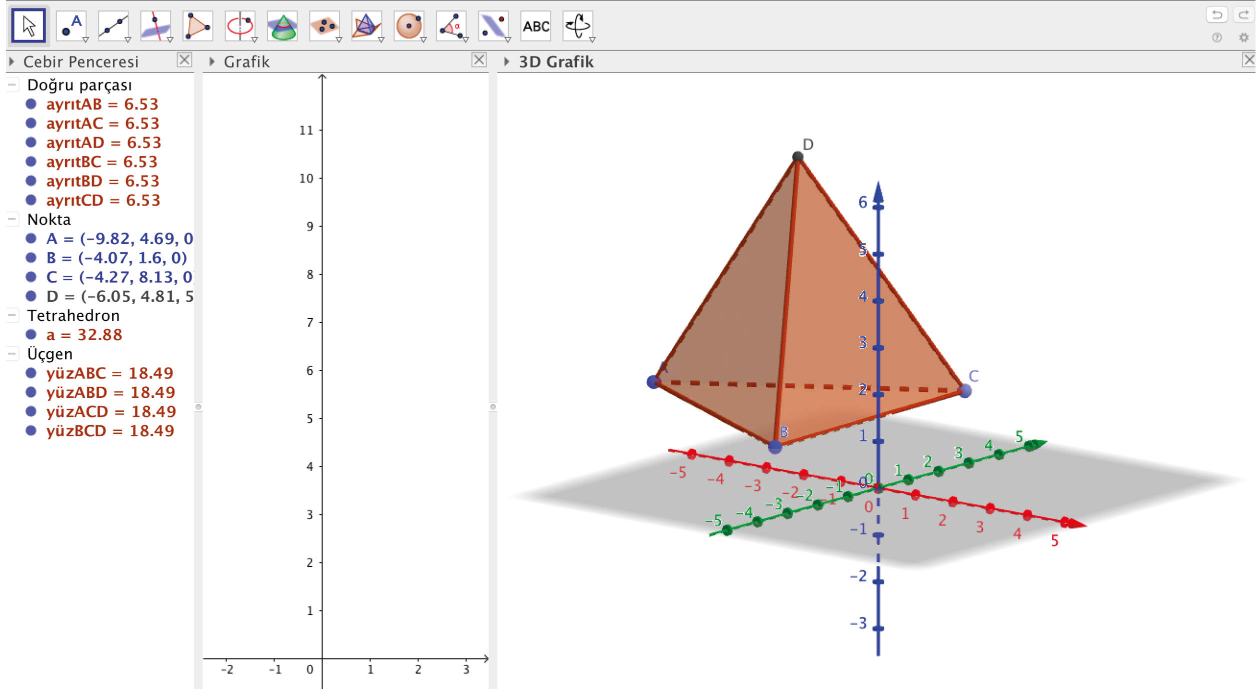
Bilgi



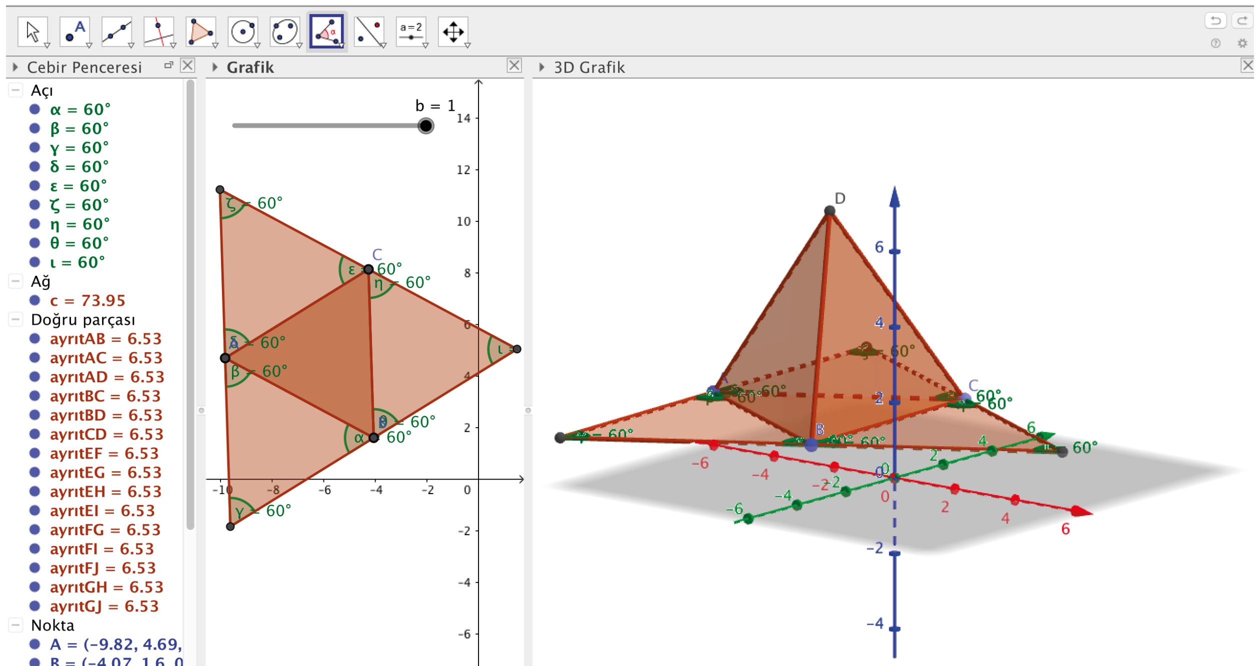
Tüm yüzleri eşkenar üçgen olan üçgen piramide **düzgün dört yüzlü** denir. Yandaki şekilde bir ayrıtı a birim olan bir düzgün dört yüzlü verilmiştir.

GeoGebra Programı ile Düzgün Dört Yüzlü Çizimi ve Açınımı

GeoGebra programını açınız. “Görünüm” sekmesine ve ardından açılan “3D Grafik” sekmesine tıklayınız. Araç çubuğundaki 9. kutuya ve ardından açılan “dörtyüzlü” sekmesine tıklayınız. Daha sonra “3D Grafik” penceresinde bulunan düzlemdeki herhangi iki noktaya tıklayınca ekranda tepe noktası D, tabanı ABC eşkenar üçgeni ve her bir ayrıt uzunluğu eşit olan düzgün dört yüzlü görülecektir.
Cebir penceresinde ayrıt uzunluklarının eşit olduğuna dikkat ediniz.



Araç çubuğundaki 9. kutuya ve ardından açılan “Düzleme Aç” sekmesine tıklayınız. Daha sonra “3D Grafik” penceresindeki düzgün dört yüzlüye tıklayarak bu piramidin açınımını görebilirsiniz. Aynı zamanda grafik penceresine bakılırsa tabanı ABC eşkenar üçgeni olan bu piramidin açınımı görülür. Ekrandaki b sürgüsü hareket ettirilirse açınımın nasıl olduğu anlaşılabilir. Araç çubuğundaki 11. kutuya ve ardından açılan “Açı” sekmesine tıklayınız. Grafik penceresindeki üçgenlerin iç bölgelerine tıklandığında açıların 60° olduğu görülür.



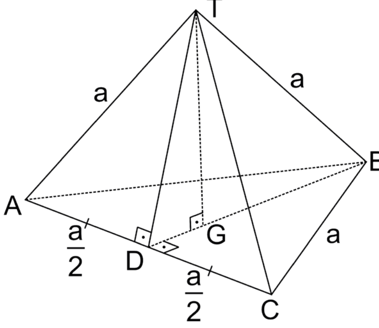


Örnek 18

Bir ayrıt uzunluğu a cm olan düzgün dört yüzlünün yüksekliğini, yan yüz yüksekliğini ve yüzey alanını a cinsinden bulunuz.



Çözüm



Bir ayrıt uzunluğu a cm olan düzgün dört yüzlü yanda verilen şekildeki gibi çizilsin ve G noktası ABC eşkenar üçgenin ağırlık merkezi olsun. Bu durumda [BD] kenarortay olduğundan $|AD| = |DC| = \frac{a}{2}$ cm olur.

TAC ve BAC eşkenar üçgenlerinin yükseklikleri [TD] ve [BD] dır. Bir kenarı a cm olan bu eşkenar üçgenlerin yükseklikleri $|TD| = |BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm ve buradan bir yan yüz yüksekliği $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm olur. G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan $|DG| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ cm olur.

Düzgün dört yüzlünün yüksekliği [TG] olmak üzere TGD dik üçgeninde Pisagor teoremiyle

$$|TD|^2 = |TG|^2 + |GD|^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = |TG|^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = |TG|^2 + \frac{3a^2}{36}$$

$$|TG|^2 = \frac{24a^2}{36}$$

$$|TG| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ cm bulunur.}$$

Yüzey alanı ise dört eş eşkenar üçgenin alanı toplamından $4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ cm^2 olur.



İpucu

Bir ayrıtı a birim olan düzgün dörtyüzlünün

- Yan yüz yüksekliği $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ birimdir.
- Yüksekliği $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ birimdir.
- Yüzey alanı $a^2\sqrt{3}$ birimkaredir.



Örnek 19

Bir ayrıtı 6 cm olan düzgün dört yüzlünün yüksekliğinin kaç cm ve alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

Bir ayrıtı $a = 6$ cm olan düzgün dörtyüzlünün yüksekliği $\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$ cm olur.

Yüzey alanı ise $a^2\sqrt{3} = 6^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ cm^2 bulunur.



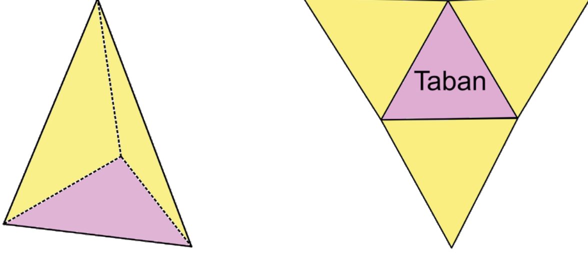
Örnek 20

Düzgün üçgen piramit, kare piramit ve düzgün altıgen piramidin açınımlarını yapınız.



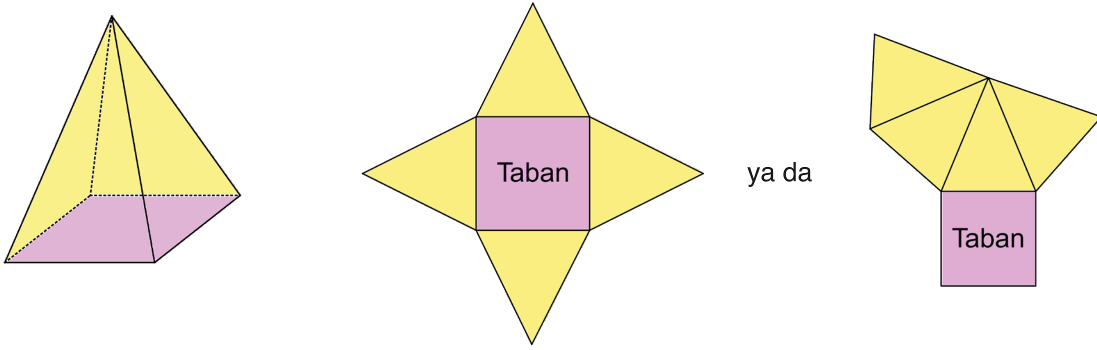
Çözüm

- Düzgün üçgen piramit aslında eşkenar üçgen dik piramittir.



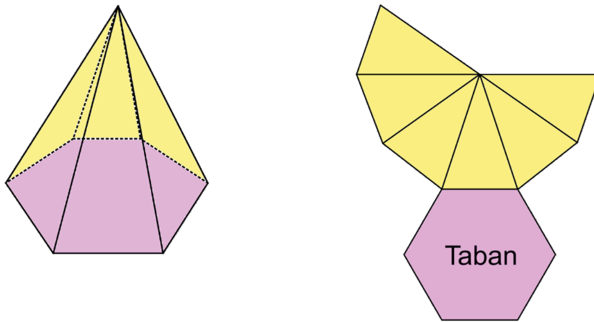
Düzgün üçgen piramit ve açınımı yukarıdaki şekillerde verildiği gibi yapılabilir.

- Kare piramit



Kare piramit ve açınımları yukarıdaki şekillerde verildiği gibi yapılabilir.

- Düzgün altıgen piramit

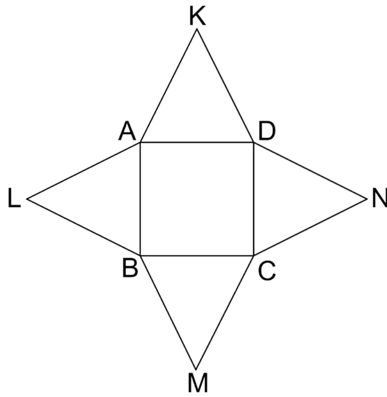


Düzgün altıgen piramit ve açınımı yukarıdaki şekillerde verildiği gibi yapılabilir.

Siz de açınımları farklı şekilde gösterebilirsiniz.



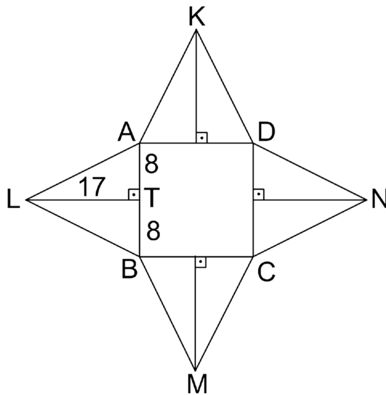
Örnek 21



Açınımı yandaki şekildeki gibi olan düzgün piramidin yan yüz yüksekliği 17 cm ve tabandaki çokgenin bir kenarı 16 cm olduğuna göre bu piramidin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm



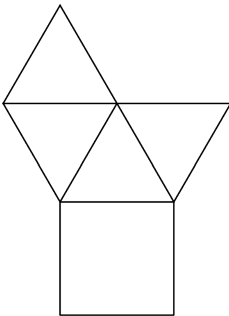
Verilen açınım düzgün piramit açınımı olduğundan ABCD karedir. Ayrıca $\widehat{KAD} \cong \widehat{LBA} \cong \widehat{MCB} \cong \widehat{NDC}$ olan ikizkenar üçgenlerdir. Düzgün piramidin yüzey alanı eş olan bu dört ikizkenar üçgenin alanı ile ABCD karesinin alanının toplamıdır. LBA üçgenin alanı $\frac{|LT| \cdot |AB|}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136 \text{ cm}^2$ olur. Piramidin yanal yüzeyinin alanı ise $A_Y = 4 \cdot A(\widehat{LBA}) = 4 \cdot 136 = 544 \text{ cm}^2$ olur.

Piramidin taban alanı $A_T = A(ABCD) = 16^2 = 256 \text{ cm}^2$ olur.

Piramidin yüzey alanı ise $A_T + A_Y = 256 + 544 = 800 \text{ cm}^2$ bulunur.



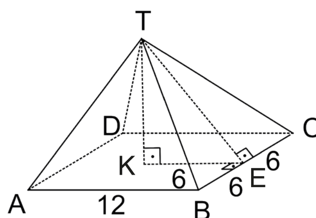
Örnek 22



Şekildeki bütün ayrıtları eşit olan kare dik piramidin açınımının çevresi 96 cm dir. Buna göre piramidin kapalı hâldeki yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm



Kare dik piramidin bir ayrıtı a cm ise soruda verilen şeklin çevresi $8a = 96$ cm dir. Buradan $a = 12$ cm bulunur. Şekildeki ABCD karesinin ağırlık merkezi olan K noktasına T noktasından çizilen $[TK]$ piramidin yüksekliğidir. BC kenarının orta noktası olan E noktası K ve T noktasıyla birleştirilirse EKT dik üçgeni elde edilir. TBC eşkenar üçgen olduğundan $|TE| = 6\sqrt{3}$ cm olur. K noktası ağırlık merkezi olduğundan $|KE| = 6$ cm olur. EKT üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|TE|^2 = |TK|^2 + |KE|^2 \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = |TK|^2 + 6^2 \Rightarrow |TK| = 6\sqrt{2}$ cm bulunur.

Buradan piramidin yüksekliği $6\sqrt{2}$ cm olur.



Bilgi

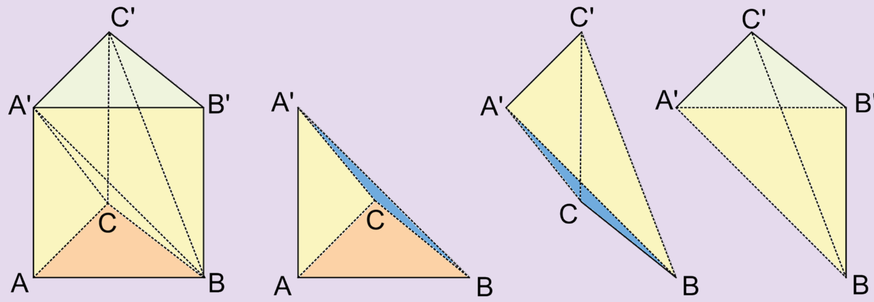
Herhangi bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte biridir.

Bu özelliğin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Buluyorum

Şekildeki üçgen dik prizma aşağıdaki gibi kesilerek üç tane eş üçgen piramide ayrılsın.

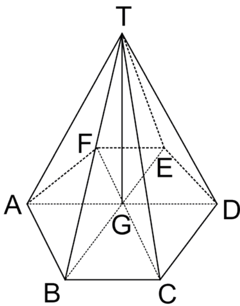


Prizmanın tabanları birbirine eş olan ABC üçgeni ile $A'B'C'$ üçgeninden oluşmaktadır. Bu durumda $(A', \widehat{CAB})$ ile $(B, \widehat{C'A'B'})$ piramitlerinin taban alanları ve yükseklikleri eşittir. Buradan hacimlerinin de eşit olduğu görülür. Yine $\widehat{A'AC}$ ile $\widehat{CC'A'}$ eş olduğundan $(B, \widehat{A'AC})$ ile $(B, \widehat{C'A'C})$ piramitlerinin taban alanları ve yükseklikleri eşit dolayısıyla hacimleri de birbirine eşittir.

Sonuç olarak üçgen dik prizma aynı hacimli olan 3 tane üçgen piramide ayrılmış oldu. Bu durumda her bir piramidin hacmi üçgen prizmanın hacminin $\frac{1}{3}$ idir.



Örnek 23



Yandaki şekilde verilen $(T, ABCDEF)$ düzgün altıgen piramidinin taban alanı $96\sqrt{3}$ cm^2 ve yüksekliği 20 cm olduğuna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



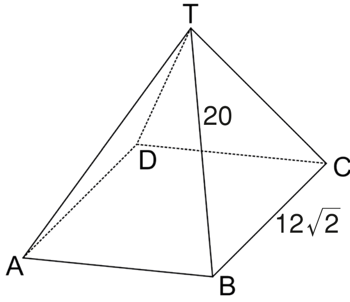
Çözüm

Piramidin yüksekliği $[TG]$ olmak üzere

Piramidin hacmi $= \dfrac{A(ABCDEF) \cdot |TG|}{3} = \dfrac{96\sqrt{3} \cdot 20}{3} = 640\sqrt{3}$ cm^3 bulunur.



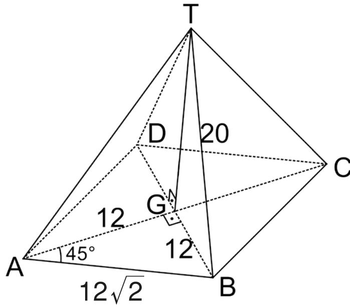
Örnek 24



Yandaki şekilde verilen kare düzgün piramitte $|TB| = 20$ cm ve $|BC| = 12\sqrt{2}$ cm olduğuna göre $(T,\ ABCD)$ kare düzgün piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



Çözüm



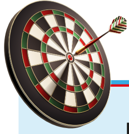
G noktası ABCD karesinin ağırlık merkezidir. Bu durumda

$[TG] \perp [GB]$ olduğundan $\widehat{TGB}$ dik üçgen olur. TGB dik üçgeninde

3 birim - 4 birim - 5 birim dik üçgeni yardımıyla piramidin yüksekliği

$h = |TG| = 16$ cm bulunur.

Piramidin hacmi $\dfrac{A(ABCD) \cdot h}{3} = \dfrac{(12\sqrt{2})^2 \cdot 16}{3} = 1536\ cm^3$ bulunur.



Bilgi

Bir ayrıt uzunluğu a birim olan düzgün dört yüzlünün hacmi $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ birimküptür.



Örnek 25

Hacmi $18\sqrt{2}\ cm^3$ olan düzgün dört yüzlünün tüm yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



Çözüm

Hacim $= \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow 18\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow a^3 = 196 \Rightarrow a = 6$ cm olur.

Bu durumda bir kenarının uzunluğu 6 cm olan düzgün dört yüzlünün tüm yüzey alanı A olmak üzere

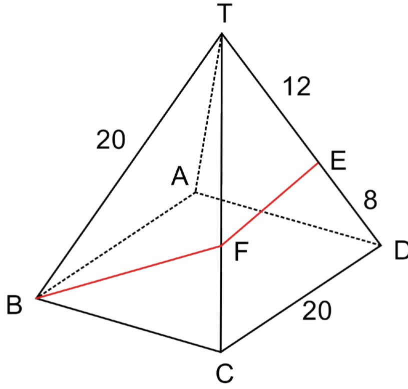
$A = a^2\sqrt{3}$

$A = 6^2\sqrt{3}$

$A = 36\sqrt{3}\ cm^2$ olur.



Örnek 26



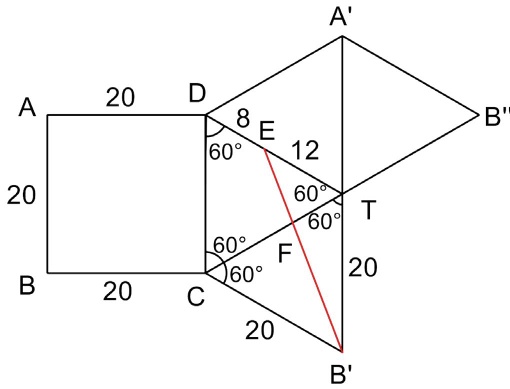
Yandaki (T, ABCD) düzgün kare piramidi şeklindeki bir yapının yangın merdiveni [TE], [EF] ve [FB] boyunca yapılacaktır.

$|CD| = |TB| = 20$ m, $|TE| = 12$ m ve $|ED| = 8$ m olmak üzere bu şartlarda kırmızı çizgi boyunca yapılacak bir yangın merdiveninin **en az** kaç metre olacağını bulunuz.

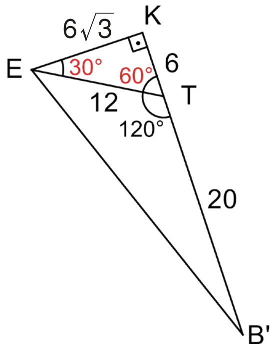


Çözüm

Düzgün kare piramidin yanal ayrıtı ile taban kenarının uzunluğu eşit olduğundan her bir yanal yüzey eşkenar üçgen olur.



Şeklin açınımı ise yukarıdaki gibi yapılırsa merdivenin en kısa olması için B′, F ve E noktaları doğrusal olmalıdır. Yukarıdaki şekilde TB′E üçgeni aşağıdaki gibi çizilsin ve E noktasından B'T doğrusuna dikme indirilsin.



Oluşan EKT $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeninde $|KT| = 6$ m ve $|EK| = 6\sqrt{3}$ m olur. Oluşan KEB′ dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|B'E|^2 = |KE|^2 + |B'K|^2$

$|B'E|^2 = (6\sqrt{3})^2 + 26^2$

$|B'E|^2 = 108 + 676$

$|B'E| = \sqrt{784}$

$|B'E| = 28$ metre olur.

Sonuç olarak yangın merdiveninin uzunluğu en az

$|TE| + \underbrace{|EF| + |FB|}_{|B'E|} = |TE| + |B'E|$

$|TE| + |B'E| = 12 + 28$

$|TE| + |B'E| = 40$ m olur.



Örnek 27

Ayrıtları 60 cm, 90 cm ve 150 cm olan dikdörtgenler prizması şeklinde bir kereste yontularak dik piramit elde edilecektir. Elde edilecek dik piramidin hacminin en çok kaç m^3 olacağını bulunuz.



Çözüm

Elde edilecek piramidin hacminin en büyük olması için piramidin tabanının prizmanın herhangi bir tabanına eşit olması ve yüksekliğinin bu tabana dik olan prizmanın ayrıtına eşit olması gerekir. Bu şekilde elde edilecek piramidin hacmi prizmanın hacminin $\frac{1}{3}$ idir. Dolayısıyla bu piramidin hacmi

$\frac{90 \cdot 60 \cdot 150}{3} = 270.000 \text{ cm}^3 = 0,27 \text{ m}^3$ olur.

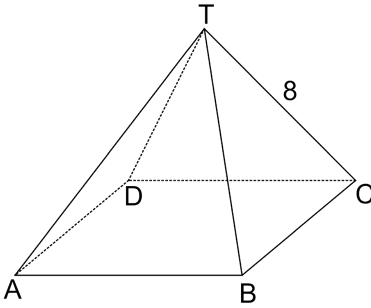


İpucu

Aralarında benzerlik oranı bulunan cisimlerin hacimleri oranı, benzerlik oranının küpüne eşittir.



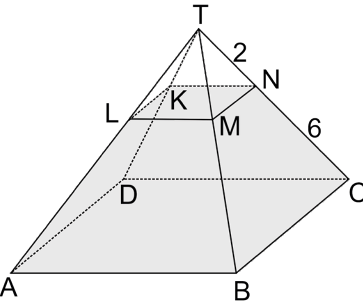
Örnek 28



Yandaki şekilde verilen (T, ABCD) piramidi biçimindeki bir kaba yüksekliğinin $\frac{3}{4}$ üne kadar su dolduruluyor. $|TC| = 8$ cm olduğuna göre suyun hacminin (T, ABCD) piramidinin hacmine oranını bulunuz.



Çözüm



Piramidin içine su doldurulunca su yüzeyi yukarıda verilen şekilde belirtilen KLMN dörtgeni hizasına gelir.

Su, kabın $\frac{3}{4}$ üne kadar doldurulduğundan $\frac{|NC|}{|TC|} = \frac{3}{4}$ olur. Buradan $\frac{|NC|}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow |NC| = 6$ cm bulunur.

Suyun üst yüzeyi olan KLMN dörtgeni (T, KLMN) piramidinin tabanıdır. (T, KLMN) piramidi ile (T, ABCD) piramidi benzer olduğundan hacimleri oranı benzerlik oranının küpüne eşittir. Buradan

$\left(\frac{|TN|}{|TC|}\right)^3 = \left(\frac{2}{8}\right)^3 = \frac{1}{64}$ olur. (T, KLMN) piramidinin hacmi V olursa (T, ABCD) piramidinin hacmi 64V olur.

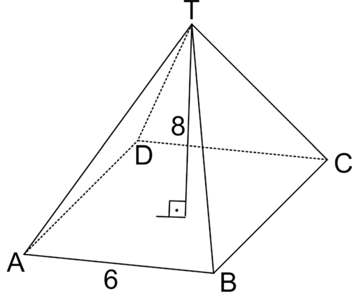
Suyun hacmi ise $64V - V = 63V$ olur. Buradan suyun hacminin (T, ABCD) piramidinin hacmine oranı

$\frac{63V}{64V} = \frac{63}{64}$ bulunur.



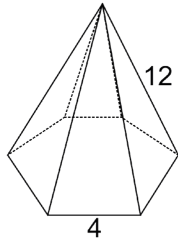
ALIŞTIRMALAR

1.



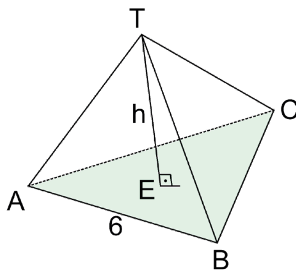
Yukarıdaki şekilde taban ayrıtı 6 cm ve yüksekliği 8 cm olan kare dik piramit verilmiştir.
Buna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

2.



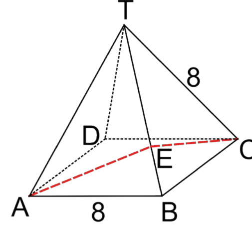
Yukarıdaki şekilde verilen taban ayrıt uzunluğu 4 cm olan düzgün altıgen dik piramidin yanal ayrıtı 12 cm dir.
Buna göre piramidin yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

3.



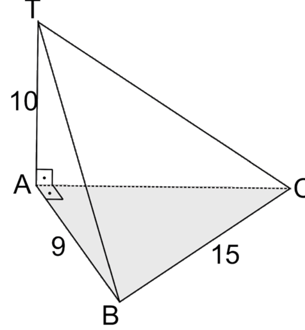
Yukarıdaki şekilde verilen bir ayrıt uzunluğu 6 cm olan düzgün dört yüzlünün yüksekliği olan h değerinin kaç cm ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

4.



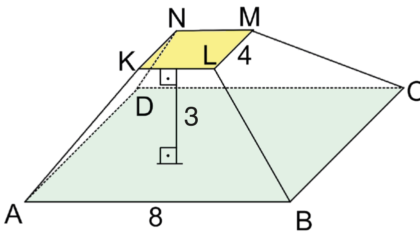
Yukarıdaki şekilde verilen kare dik piramidin taban ve yanal ayrıt uzunlukları 8 cm dir.
$E \in [TB]$ olmak üzere $|AE| + |EC|$ toplamının **en az** kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde (T, ABC) piramidinde $[BA] \perp [CA]$, $[CA] \perp [TA]$; $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|TA| = 10$ cm olduğuna göre piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde kare dik piramit biçiminde bir cisim tabana paralel olan KLMN düzlemi boyunca kesildikten sonra kalan parçası verilmiştir. $|AB| = 8$ cm, $|ML| = 4$ cm ve ABCD ile KLMN düzlemleri arasındaki uzaklık 3 cm olduğuna göre verilen cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Bir küpün ayrıt sayısı .... dir.

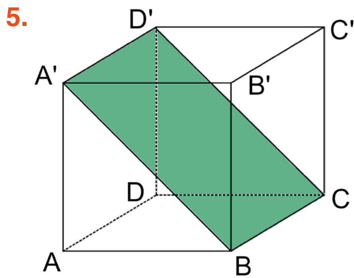
2. Bir düzgün altıgen prizmanın yüzey sayısı .... dir.

3. Ayrıt uzunlukları a cm, b cm ve c cm olan dikdörtgenler prizmasının hacmi .... cm^3 tür.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

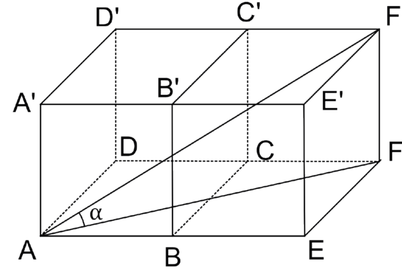
4. Yüksekliği taban ayrıtının 3 katı olan kare dik prizmanın yüzey alanı 126 cm^2 olduğuna göre prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

5.



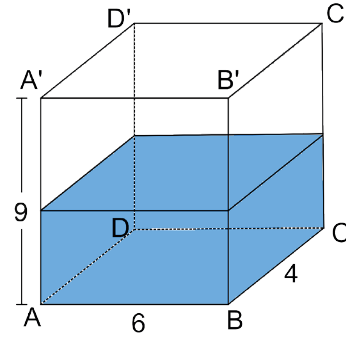
Yukarıdaki şekildeki ABCD tabanlı küpte $A'BCD'$ dikdörtgeninin alanı $8\sqrt{2}$ cm^2 olduğuna göre küpün hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde eş iki küp yan yana koyularak AEFD tabanlı dikdörtgenler prizması elde ediliyor. $m(\widehat{F'AF}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

7.

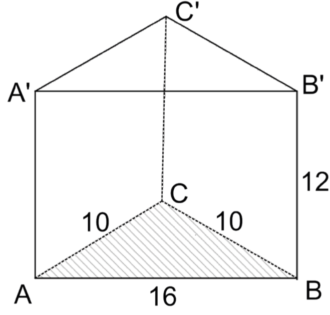


Yukarıdaki şekilde verilen yüksekliği 9 cm olan ABCD tabanlı dikdörtgenler prizmasında $|AB| = 6$ cm ve $|BC| = 4$ cm olarak veriliyor. Prizmanın içinde yüksekliğinin $\frac{2}{3}$ si kadar su varken prizma $BCC'B'$ yüzeyi üstüne yatırılırsa suyun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

8. Bir küpün tüm ayrıt uzunlukları 3 kat artırılırsa hacminin kaç katına çıkacağını bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

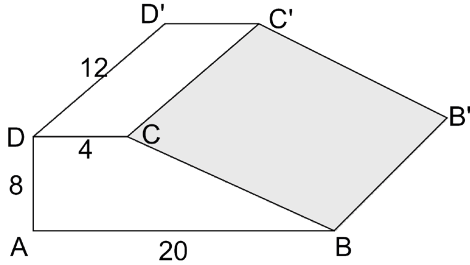
9.



Yukarıdaki şekilde verilen ikizkenar üçgen dik prizmada $|AC| = |BC| = 10$ cm, $|AB| = 16$ cm ve $|BB'| = 12$ cm olduğuna göre prizmanın yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 432 B) 528 C) 540 D) 576 E) 638

10.



Dikdörtgenler prizmasının bir kısmı kesilerek oluşturulan yukarıdaki şekilde $|AD| = 8$ cm, $|DC| = |D'C'| = 4$ cm, $|DD'| = |CC'| = 12$ cm ve $|AB| = 20$ cm olduğuna göre şeklin hacmi kaç cm^3 tür?

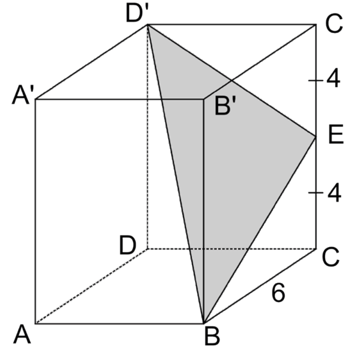
A) 840 B) 960 C) 980 D) 1120 E) 1152

11. Bir dikdörtgenler prizmasının farklı uzunluktaki ayrıtları x cm, y cm ve z cm dir.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6}$ ve dikdörtgenler prizmasının tüm alanı 300 cm^2 olduğuna göre hacmi kaç cm^3 tür?

A) 180 B) 240 C) 300 D) 360 E) 420

12.



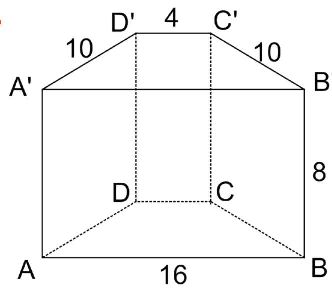
Yukarıdaki şekilde verilen kare dik prizmada $|BC| = 6$ cm ve $|C'E| = |EC| = 4$ cm olduğuna göre $A(\widehat{BED'})$ kaç cm^2 dir?

A) $4\sqrt{13}$ B) $4\sqrt{17}$ C) $6\sqrt{13}$ D) $6\sqrt{17}$ E) $4\sqrt{34}$

13. Yan yüzleri eşkenar üçgen olan kare dik piramidin yüksekliği $3\sqrt{2}$ cm olduğuna göre piramidin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 24 B) 36 C) $36\sqrt{2}$ D) $36\sqrt{3}$ E) 48

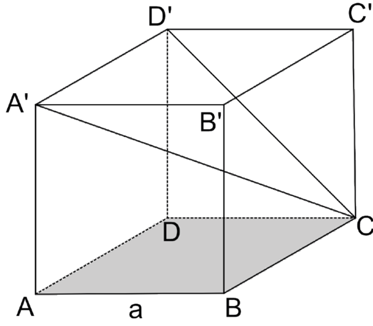
14.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD tabanlı ikizkenar yamuk dik prizmada $[AB] \parallel [CD]$; $|AB| = 16$ cm, $|A'D'| = |C'B'| = 10$ cm ve $|D'C'| = 4$ cm olduğuna göre prizmanın hacmi kaç cm^3 tür?

A) 240 B) 320 C) 480 D) 640 E) 720

15.



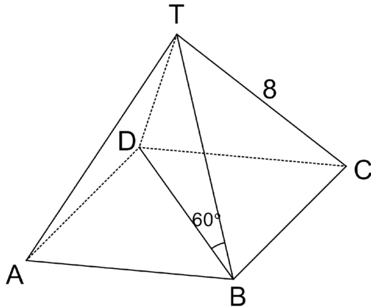
Bir ayrıt uzunluğu a birim olan yukarıdaki şekilde verilen küpte $|A'C| \cdot |D'C|$ değerinin a cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) a^2 B) $\sqrt{2}a^2$ C) $2a^2$ D) $\sqrt{3}a^2$ E) $\sqrt{6}a^2$

16. Tabanının bir kenar uzunluğu 12 cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın yüksekliği 18 cm olduğuna göre yanal alanı kaç cm^2 dir?

A) 324 B) 432 C) 648 D) 720 E) 864

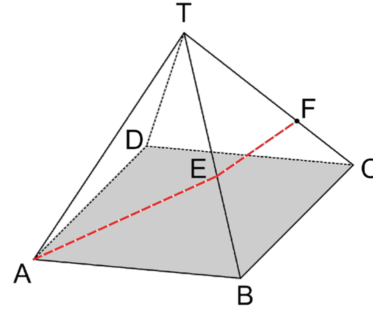
17.



Yukarıdaki şekilde verilen (T, ABCD) kare dik piramidinde $m(\widehat{DBT}) = 60°$ ve $|TC| = 8$ cm olduğuna göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 32 B) 64 C) 81 D) $64\sqrt{3}$ E) $96\sqrt{3}$

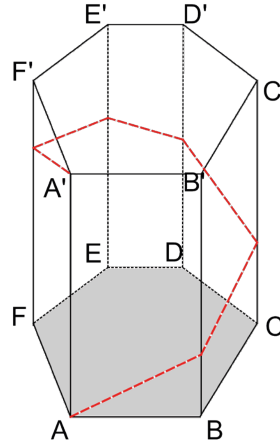
18.



Yukarıdaki şekilde verilen (T, ABCD) kare dik piramidinde tüm ayrıt uzunlukları eşittir. $|TF| = 3$ cm, $|FC| = 2$ cm ve $E \in [TB]$ olduğuna göre $|AE| + |EF|$ **en az** kaç cm dir?

A) $3\sqrt{2}$ B) 5 C) 7 D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

19.



A noktasından A′ noktasına kadar tüm yüzeylerden geçen bir şerit ile kaplanan yukarıdaki şekilde verilen düzgün altıgen dik prizmada $|AB| = 8$ cm ve $|CC'| = 14$ cm olduğuna göre şeridin uzunluğu **en az** kaç cm dir?

A) 48 B) 50 C) 56 D) $40\sqrt{2}$ E) $50\sqrt{3}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Bir ayrıt uzunluğu a birim olan küpün hacmi .... birimküptür.

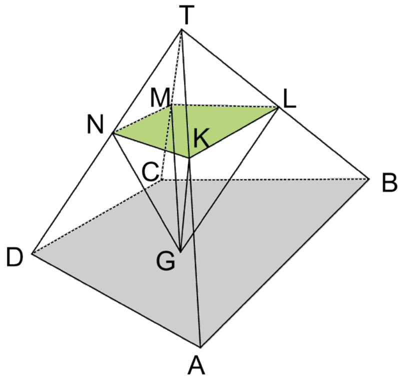
2. Bir dik prizmanın taban çevresi ile yüksekliğinin çarpımı .... alanını verir.

3. Bir ayrıt uzunluğu x cm olan düzgün dört yüzlünün hacmi .... cm^3 tür.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

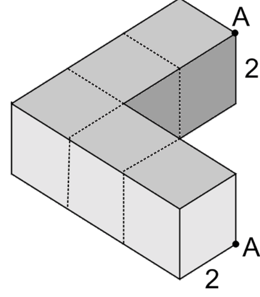
4. Taban ayrıt uzunluğu $6\sqrt{2}$ cm olan kare dik piramidin bir yanal ayrıt uzunluğu 10 cm olduğuna göre hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

5.



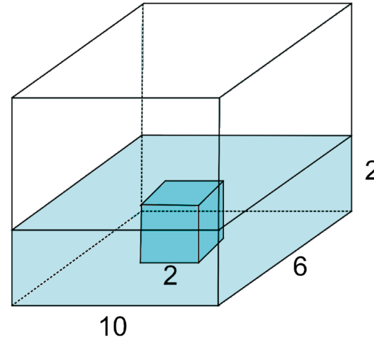
Yukarıdaki şekilde (T, ABCD) dik piramittir. Yanal ayrıtlarının orta noktaları olan K, L, M, N noktaları ve ABCD dörtgeninin ağırlık merkezi G noktası olmak üzere (G, KLMN) piramidi oluşturuluyor. (G, KLMN) piramidinin hacminin (T, ABCD) piramidinin hacmine oranını bulunuz.

6.



Bir kenar uzunluğu 2 cm olan 5 eş küple oluşturulan yukarıdaki şekilde |AA′| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



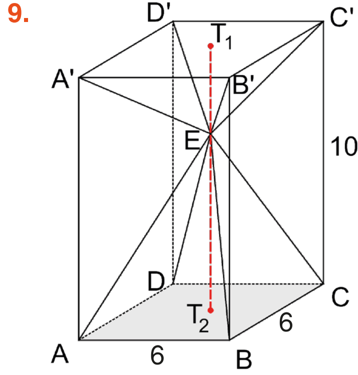
İçinde bir miktar su bulunan dikdörtgenler prizmasının içine bir ayrıt uzunluğu 2 cm olan küp atıldığında suyun yüksekliği yukarıda verilen şekildeki gibi 2 cm olmuştur. Tamamı suyun içerisinde bulunan küp, prizmanın içinden çıkarılınca suyun yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

8. Bir dikdörtgenler prizmasının farklı uzunluktaki ayrıtları 2, 3 ve 4 sayıları ile orantılıdır. Prizmanın tüm alanı 156 cm^2 olduğuna göre en uzak iki köşesi arasındaki uzaklık kaç cm dir?

A) $5\sqrt{3}$ B) $\sqrt{79}$ C) $4\sqrt{5}$ D) $\sqrt{87}$ E) $3\sqrt{17}$

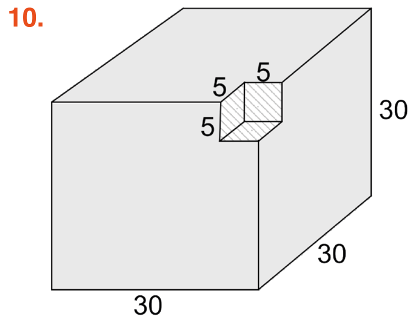
9.



Yukarıdaki şekilde verilen tabanı ABCD karesi olan dik prizmada T_1 ve T_2 tabanların ağırlık merkezidir. $[T_1T_2] /\!/ [AA']$ olmak üzere $(E, A'B'C'D')$ ve $(E, ABCD)$ piramitlerinin hacimleri toplamı kaç cm^3 tür?

A) 120 B) 180 C) 200 D) 240 E) 300

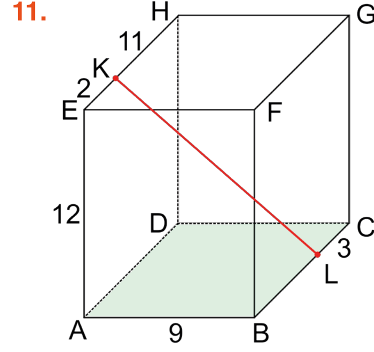
10.



Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi küp şeklindeki pastanın bir köşesinden küp şeklinde bir kısmı kesilerek çıkarılıyor.
Pastanın son hâlinin yüzey alanının ilk hâlinin yüzey alanına oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{25}{36}$ D) $\frac{24}{25}$ E) 2

11.



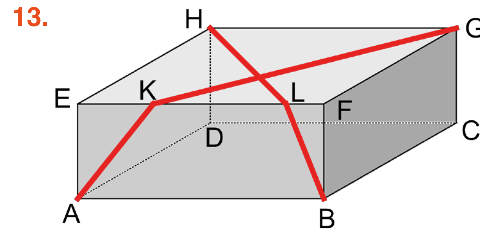
Yukarıdaki şekilde verilen dikdörtgenler prizmasında $|AB| = 9$ cm, $|AE| = 12$ cm, $|EK| = 2$ cm, $|KH| = 11$ cm ve $|LC| = 3$ cm olduğuna göre $|KL|$ kaç cm dir?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 20

12. Farklı uzunluktaki ayrıtları 15 cm, 20 cm ve 25 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki içi dolu tahta bloğun tamamı **en az** kaç eş küpe ayrılabilir?

A) 40 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

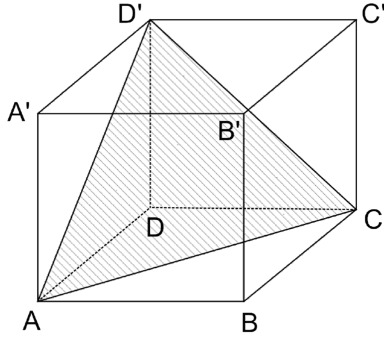
13.



Bir firma ürünlerini yukarıda verildiği gibi dikdörtgenler prizması şeklindeki kutu içine koymaktadır. Bu kutunun yüzeyi üzerine H ile B noktaları ve A ile G noktaları arasına **en kısa** olacak şekilde çizgiler çizilecektir. Kutuda $|CG| = 10$ cm, $|BC| = 20$ cm ve $|AB| = 30$ cm olduğuna göre $|KL|$ kaç cm dir?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

14.



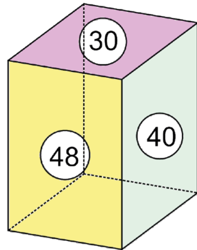
Yukarıdaki şekilde verilen küpte
$A(\widehat{ACD'}) = 3\sqrt{3}$ cm^2 olduğuna göre küpün hacmi kaç cm^3 tür?

A) $6\sqrt{6}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{2}$ D) 36 E) 27

15. Yüksekliği taban ayrıt uzunluğunun 2 katı olan bir kare dik prizma tamamen su ile doludur. Bu prizmadaki su, boyutları prizmanın taban ayrıt uzunluğunun yarısı olan eş küplere doldurulacaktır.
Buna göre kaç adet küp gerekir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

16.



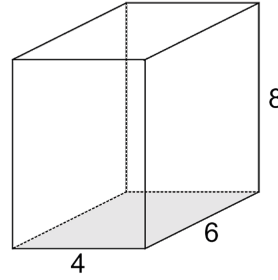
Yukarıdaki şekilde üç farklı yüzey alanı 30 cm^2, 40 cm^2 ve 48 cm^2 olarak verilen dikdörtgenler prizmasının hacmi kaç cm^3 tür?

A) 180 B) 240 C) 360 D) 420 E) 480

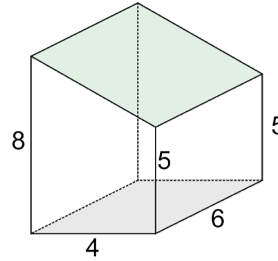
17. Boyutları 3, 4 ve 6 ile orantılı olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi 576 cm^3 olduğuna göre yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 216 B) 324 C) 432 D) 576 E) 648

18.



Şekil - I



Şekil - II

Şekil - I deki ayrıt uzunlukları 4 cm, 6 cm ve 8 cm olarak verilen dikdörtgenler prizmasının bir parçası kesilip Şekil - II deki cisim elde edilmiştir.
Buna göre kesilen parçanın hacmi kaç cm^3 tür?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 36

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

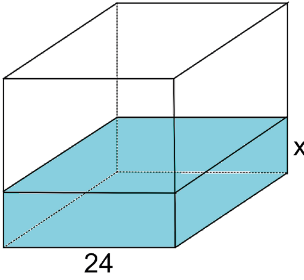
A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Ayrıt uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgenler prizmasına .... denir.

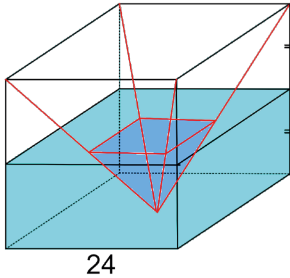
2. Aynı taban alanına ve eşit yüksekliklere sahip olan bir dikdörtgenler prizması ile bir piramit için dik piramidin hacminin, dikdörtgenler prizmasının hacmine oranı .... tür.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

3.



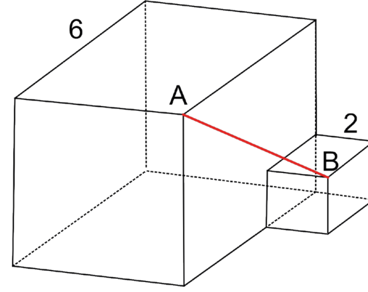
Şekil - I



Şekil - II

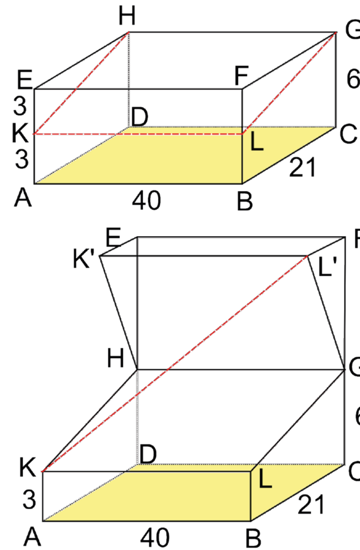
Şekil - I de bir ayrıtı 24 cm olan küpün içerisinde x cm yüksekliğinde su vardır. Bu küpün içine yüksekliği 24 cm ve taban ayrıtları da 24 cm olan kare dik piramit içine su dolmadan Şekil - II deki gibi yerleştiriliyor. Böylece su seviyesi küpün yarı seviyesine yükseliyor. Buna göre suyun ilk yüksekliği olan x in kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde ayrıt uzunlukları 6 cm ve 2 cm olan iki küp verilmiştir.
Buna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

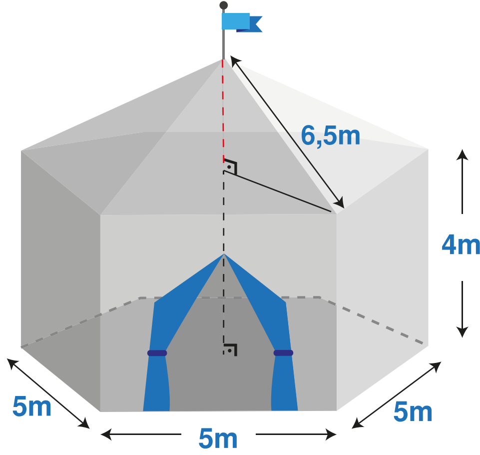
5.



Yukarıdaki şekilde ayrıt uzunlukları cm cinsinden verilen dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun kapağı açılarak F, G, C noktaları doğrusal duruma getiriliyor. [KL] ∥ [AB] olduğuna göre |KL'| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

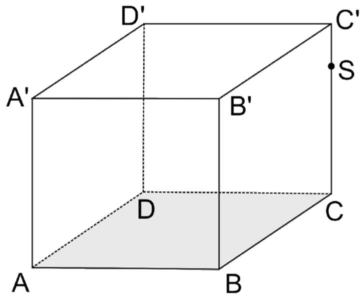
6.



Bir belediye, kimsesizlere yardım amacıyla ramazan ayında iftar çadırı kuracaktır. Çadırın tabanı yukarıdaki şekildeki gibi düzgün altıgen dik prizma ve üst kısmı altıgen dik piramit şeklinde olacaktır. Prizmanın yüksekliği 4 m, prizmanın taban ayrıtı 5 m ve üstteki piramidin bir yan ayrıtı 6,5 m uzunluğundadır. Bu çadırın tabanı hariç diğer kısımları kumaşla kaplanacaktır.
Buna göre **en az** kaç m^2 kumaş gerekir?

A) 144 B) 180 C) 210 D) 288 E) 324

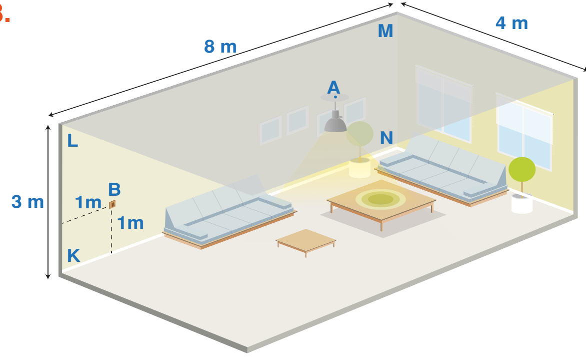
7.



Yukarıdaki şekilde verilen küpte $|AB| = 6$ cm, ve $|C'S| = 2$ cm olarak veriliyor.
A noktasından S noktasına küpün yüzeyi üzerinden şeritler çekilecektir. Şeritlerden **en kısa** olanının uzunluğu kaç cm dir?

A) $2\sqrt{34}$ B) $2\sqrt{35}$ C) $2\sqrt{65}$ D) $4\sqrt{10}$ E) $4\sqrt{17}$

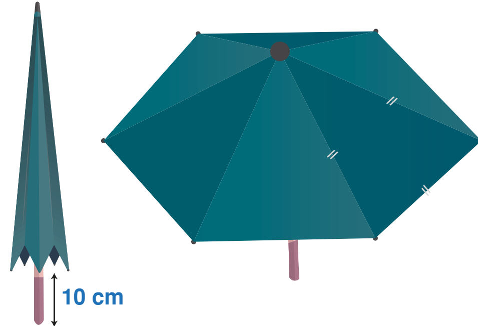
8.



Dikdörtgenler prizması şeklindeki bir odanın tavanının ağırlık merkezi olan A noktasına bir lamba ve KLMN yüzeyi olan duvarının üzerindeki B noktasına da lamba anahtarı konulacaktır. B noktasının [KL] ve [KN] na uzaklığı 1m dir. Odanın tavan boyutları şekildeki gibi 8 m ve 4 m ve odanın yüksekliği ise 3 m dir.
Buna göre odanın duvarları üzerinden lamba anahtarı ile lamba arasına çekilecek olan kablonun uzunluğu **en az** kaç m dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) $3\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{2}$

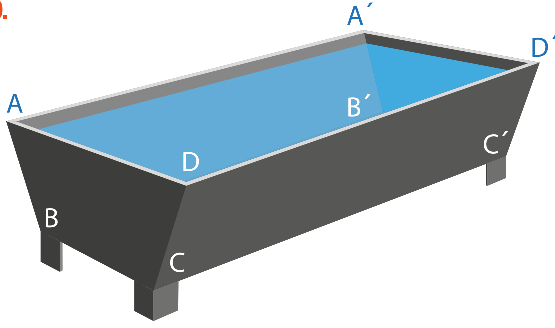
9.



Yukarıdaki şekilde kapalı hâlde bulunan şemsiyenin sapı 10 cm dışarıdadır. Şemsiye şekildeki gibi açılınca şemsiyenin yan yüzleri eşkenar üçgen olan altıgen piramit şeklini almaktadır. Piramidin yan yüzeylerinin alanları toplamı $5400\sqrt{3}$ cm^2 olduğuna göre şemsiyenin sapının boyu kaç cm dir?

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

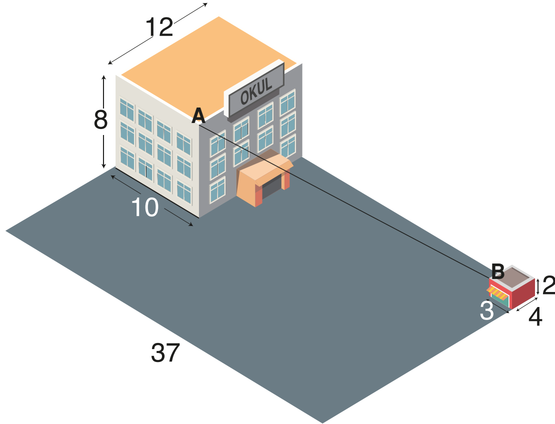
10.



Bir çiftliğin sahibi Cafer Bey, hayvanların su ihtiyacını karşılamak için yukarıdaki şekilde verilen ikizkenar yamuk dik prizma şeklinde kaplardan yaptıracaktır. $[AD] \parallel [BC]$ olmak üzere kabın boyutları $|AB| = |DC| = 50$ cm, $|AD| = 80$ cm, $|BC| = 20$ cm ve $|AA'| = 120$ cm dir.
Buna göre kabın hacmi kaç m^3 tür?

A) 0,24 B) 2,4 C) 4,8 D) 9,6 E) 24

11.



Yukarıdaki şekilde boyutları 10 m, 12 m ve 8 m olan dikdörtgenler prizması şeklinde bir okul binası ile boyutları 3 m, 4 m ve 2 m olan dikdörtgenler prizması şeklinde bir güvenlik kulübesi okul arsasının köşelerine yapılmıştır. Dikdörtgen şeklindeki okul arsasının şekilde verilen kenar uzunluğu 37 m dir. Okul binasının A köşesi ile güvenlik kulübesinin B köşesi arasına 19 Mayıs Atatürk'ü Anma Gençlik ve Spor Bayramı kutlamaları için süsleme yapılması amacıyla ip çekilip bu ipe bayrak asılacaktır.
Buna göre **en az** kaç metre ip gereklidir?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 30

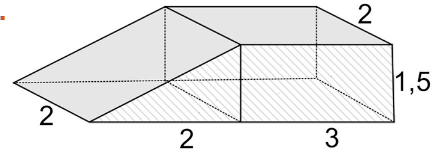
12.



Yukarıdaki şekilde yan yüzeyleri beşgen diğer yüzeyleri dikdörtgen olan bir çöp kutusu verilmiştir.
Buna göre boyutları yukarıdaki şekilde verilen çöp kutusunun yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 7200 B) 7500 C) 8100 D) 8400 E) 9600

13.



Yukarıdaki şekilde bir apartman girişindeki engelliler için yapılan rampanın boyutları metre türünden verilmiştir. Metal levha kullanılarak rampanın tabanı hariç tüm yüzeyi kaplanmıştır.
Buna göre **en az** kaç m^2 levha kullanılmıştır?

A) 22,5 B) 23 C)24 D) 26 E) 27,5

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

CEVAP ANAHTARI

10.1. SAYMA VE OLASILIK

SAYFA NO	ÖLÇME TÜRÜ	CEVAP ANAHTARI
24	ALIŞTIRMALAR	**1.** 12 **2.** 14 **3.** 44 **4.** $45 \cdot 44^4$ **5.** 4 **6.** 64 **7.** 8960
27	ALIŞTIRMALAR	**1.** 1320 **2.** 10 **3.** 240 **4.** $5! \cdot 4!$ **5.** 36 **6.** 96 **7.** 18
31	ALIŞTIRMALAR	**1.** 6 **2.** 18 **3.** 16 **4.** 20 **5.** 5
47	ALIŞTIRMALAR	**1.** 30 **2.** 3 **3.** 62 **4.** 30 **5.** 858 **6.** 20 **7.** 257 **8.** 35
49	ALIŞTIRMALAR	**1.** 64 **2.** 35
55	ALIŞTIRMALAR	**1.** $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$ **2.** 2^{10} **3.** 1 **4.** -1 **5.** $70 \cdot 3^7$ **6.** $-20 \cdot a^6 \cdot b^9$ **7.** $6048 \cdot x^2 \cdot b^5$ **8.** 80 **9.** $7 \cdot m^{-4}$ **10.** 166
62	ALIŞTIRMALAR	**1.** **2.** 8 **3.** a) 36 b) 10 c) 6 **4.** Ayrık olaylar **5.** a) $E = \{(H, K), (H, D), (K, K), (K, D), (D, K), (D, D)\}$, $S(E) = 6$ b) $A' = \{(H, D), (K, K), (D, K), (D, D)\}$ c) 5
69	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{13}{20}$ **3.** $\frac{19}{30}$ **4.** 12 **5.** 1 **6.** a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{13}{18}$ **c)** $\frac{11}{12}$ **7.** 8 **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{7}{10}$ **10.** $\frac{1}{2}$
71	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{7}{9}$ **2.** $\frac{3}{5}$ **3.** $\frac{15}{16}$ **4.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{8}{5}$ **6.** $\frac{3}{7}$ **7.** $\frac{2}{3}$ **8.** $\frac{1}{3}$
72	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** 8 **2.** 15 **3.** 3! **4.** 6 **5.** 1.a, 2.b, 3.d, 4.e **6.** 1.d, 2.c, 3.a, 4.b **7.** 14 **8.** 3 **9.** $4! \cdot 2! \cdot 5!$ **10.** 36 **11.** 12 **12.** 2 **13.** A **14.** D **15.** C **16.** C **17.** E **18.** D **19.** D **20.** C **21.** A **22.** B **23.** A **24.** D
75	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** 10 **2.** 20 **3.** 15 **4.** 1ç, 2b, 3e, 4d **5.** 1c, 2ç, 3d, 4a **6.** 5 **7.** 20 **8.** 6 **9.** 171 **10.** 4 **11.** 360 **12.** 100 **13.** E **14.** A **15.** C **16.** D **17.** B
77	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** Ayrık **2.** Örnek uzayı **3.** imkansız, kesin **4.** 32 **5.** $\frac{1}{4}$ **6.** $\frac{1}{3}$ **7.** 9 **8.** $\frac{6}{7}$ **9.** $\frac{25}{28}$ **10.** $\frac{18}{35}$ **11.** E **12.** C **13.** E **14.** D **15.** A **16.** D **17.** C

10.2. FONKSİYONLAR		
SAYFA NO	**ÖLÇME TÜRÜ**	**CEVAP ANAHTARI**
94	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) Fonksiyon b) Fonksiyon c) Fonksiyon değil ç) Fonksiyon değil **2.** $\{-11, -1, 4, 9, 19\}$ **3. a)** 44 **b)** 4 **c)** -3 ve 3 **4.** $\{7, 8, 10, 14\}$ **5.** a) 5 b) -7 c) $3x+5$ ç. $6x-7$ **6.** 3 **7.** a) Birebir b) Birebir değil c) Birebir değil ç) Birebir **8.** a) Örten b) İçine c) İçine ç) İçine **9.** -5 **10.** 28 **11.** 256 **12.** $f(x)-6$ **13.** 81
109	ALIŞTIRMALAR	**1.** -12 **2.** 8 **3.** -5 **4.** 16 **5.** a) 92 b) 215 c) 7 6. a) 0 b) 16 **7.** 6 **8.** 2076 **9.** -16 **10.** 17 **11.** $\frac{11}{2}$
115	ALIŞTIRMALAR	**2.** $(0, 12), (-3, 0)$
120	ALIŞTIRMALAR	**1.** -6 ve 6 **2.** a) $TK=\mathbb{R}$, $GK=(-\infty, 4]$ b) $TK=[-6, 7)$, $GK=[-3, 5)$ **3.** a) Fonksiyon değildir b) Fonksiyondur c) Fonksiyon değildir
122	ALIŞTIRMALAR	**1.** $f(x)=30-\frac{x}{200}$ **2.** a) $15-\frac{x}{4}$ ve $20-\frac{x}{2}$ b) 20
132	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) -3 b) -13 c) 1 **2.** a) $-3x-10$ b) $-3x+6$ c) $9x-4$ ç. $x+8$ **3.** -1 **4.** 0 **5.** $-4, 4, 20, 28$ **6.** $\{(1, 2), (2, 5), (3, 1)\}$ **7.** $\left(\frac{3}{5}\right)^5$ **8.** 223
141	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) Fonksiyondur b) Fonksiyon değildir c) Fonksiyon değildir ç) Fonksiyon değildir **2.** a) $\frac{x+7}{3}$ b) $\frac{2x}{5}$ c) $3x-2$ ç) $\frac{6x+9}{2x-4}$ **3.** $\frac{3x+2}{x-4}$ **4.** $(x+7)^3-1$ **5.** 41 **6.** 1 **7.** -8 **8.** -5 **9.** 33 **10.** 2 **11.** $\frac{4}{3}$ **12.** 0 **13.** 8
142	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** Tanım kümesi, değer kümesi **2.** Görüntü kümesi **3.** (1c, 2d, 3a, 4b) **4.** 6 **5.** 16 **6.** 16 **7.** 4 **8.** 15 **9.** 20 **10.** 6 **11.** -8 **12.** 4 **13.** 0 **14.** -11 **15.** D **16.** A **17.** B **18.** E **19.** B **20.** C **21.** B **22.** C
145	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** 1. b 2. a 3. ç 4. e **2.** -8 **3.** $\frac{-3x+2}{x-4}$ **4.** 4 **5.** $-\frac{5}{2}$ **6.** $-\sqrt{x-2}-3$ **7.** 57 **8.** $-4x+5$ **9.** Hakan **10.** $\frac{4}{5}$ **11.** A **12.** D **13.** C **14.** A **15.** C **16.** D **17.** E **18.** E **19.** B **20.** A
148	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** 8 **2.** 7 **3.** 14 **4.** 6 **5.** 10 **6.** 7 **7.** -1 **8.** 5 **9.** 4 **10.** $\frac{3}{4}x$ **11.** 6 **12.** $\frac{4}{3}x$ **13.** 16 **14.** D **15.** E **16.** E **17.** C **18.** B **19.** B **20.** A

10.3. POLİNOMLAR

SAYFA NO	ÖLÇME TÜRÜ	CEVAP ANAHTARI
162	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) polinomdur b) polinomdur c) polinomdur ç) polinom değildir **2.** 32 **3.** -64 **4.** -26 **5.** -26 **6.** 189 **7.** 8 **8.** -115 **9.** -15
172	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) $3x^3+11x^2-x$ b) $x^6-x^5+6x^4+5x^3-12x^2+14x-4$ **2.** -4 **3.** $2x^2-4x+6$ **4.** 20 **5.** a) -22 b) 10 c) 1 **6.** 6 **7.** a) -28 b) -40 **8.** 28! **9.** 7 **10.** x^2+10x **11.** 20 **12.** 16 **13.** 11 **14.** 3 **15.** 4
183	ALIŞTIRMALAR	**1.** $(x-5)^2\cdot(m-7)^2\cdot(x+m-12)$ **2.** 100 **3.** 1000^2-1^2 **4.** $9\cdot(2x+7)$ **5.** $(3x+8)\cdot(x-4)$ **6.** $(a^2+1)\cdot(a^6-a^4+1)$ **7.** $(x-1)^2\cdot(x-3)\cdot(x+1)$
187	ALIŞTIRMALAR	**1.** 1 **2.** -1 **3.** $\frac{1}{2-x}$ **4.** $x+1$ **5.** 16 **6.** $\frac{1}{(x+1)^2}$
188	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** a) terimleri b) katsayıları c) derecesi ç) baş katsayısı d) sabit terimi **2.** 1. b 2. a 3. ç **3.** 4 **4.** 1 **5.** 8 **6.** 27 **7.** $4x+a$ **8.** $-\frac{5}{2}$ **9.** $\frac{13}{12}$ **10.** -14 **11.** $(x-1)^2-2\cdot(x+1)^2$ **12.** -56 **13.** 26 **14.** A **15.** B **16.** C **17.** A **18.** C **19.** B
191	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** 1. b 2. ç 3. d **2.** 5 **3.** $\frac{3}{2x}$ **4.** $\frac{1}{x+2}$ **5.** 0 **6.** 10 **7.** B **8.** D **9.** C **10.** C **11.** A

10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

SAYFA NO	ÖLÇME TÜRÜ	CEVAP ANAHTARI
211	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) $\{-5,5\}$ b) $\left\{0,\frac{11}{2}\right\}$ c) $\{3,7\}$ ç) $\left\{\frac{5}{2},3\right\}$ **2.** $(1-\sqrt{7})$ **3.** $(19,\infty)$ **4.** 1 **5.** 3 **6.** a) $\{-a,3a\}$ b) $\{a,b\}$ c) $\left\{-\frac{3}{a},5\right\}$ **7.** n **8.** 2 **9.** 36 **10.** -1
216	ALIŞTIRMALAR	**1.** $-3+5i$ **2.** 12 **3.** a) $4+3i$ b) $2+5i$ c) $-6i$ ç) 7 **4.** -8 **5.** $2-2i,\ 2+2i$ **6.** I ve III **7.** $2-3i$ **8.** 60
224	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) 2 b) -4 c) $-\frac{1}{2}$ **2.** 4 **3.** $-\frac{1}{2}$ **4.** -45 **5.** -1 **6.** 3 **7.** $1/12$ **8.** $-\frac{5}{2}$ **9.** $x^2-x-6=0$ **10.** $x^2-6x+4=0$ **11.** $x^2-12x+18=0$
225	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	**1.** a) iki farklı gerçek b) çakışık iki kökü c) boş küme **2.** (1c, 2d, 3a) **3.** 5 **4.** $ÇK=\left\{\frac{-2+\sqrt{2}i}{2},\frac{-2-\sqrt{2}i}{2}\right\}$ **5.** 2 **6.** 12 **7.** 7 **8.** 3 **9.** 8 **10.** D **11.** C **12.** B **13.** A **14.** D **15.** D **16.** E **17.** E **18.** C **19.** D **20.** A **21.** A **22.** A **23.** C **24.** C

10.5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

SAYFA NO	ÖLÇME TÜRÜ	CEVAP ANAHTARI
239	ALIŞTIRMALAR	**1.** 105 **2.** 1620 **3.** 75 **4.** 150 **5.** 10 **6.** 8 **7.** 84 **8.** 69
246	ALIŞTIRMALAR	**1.** 130 **2.** 110 **3.** $9\sqrt{2}$ **4.** 7 **5.** 40 **6.** 24
260	ALIŞTIRMALAR	**1.** 75 **2.** 7 **3.** 10 **4.** 6 **5.** 58 **6.** 100 **7.** 19,2 **8.** 16 **9.** 8 **10.** $8\sqrt{2}$
272	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{16}{3}$ **2.** 60 **3.** 24 **4.** 144 **5.** $8\sqrt{3}$ **6.** 16
277	ALIŞTIRMALAR	**1.** 66 **2.** 8 **3.** 27 **4.** 60 **5.** $6\sqrt{3}$ **6.** 80
283	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\sqrt{61}$ **2.** 12 **3.** 2 **4.** 120 **5.** 72 **6.** 65
289	ALIŞTIRMALAR	**1.** 15 **2.** 7 **3.** 7 **4.** $\frac{1}{6}$ **5.** $\frac{48}{5}$ **6.** 21
298	ALIŞTIRMALAR	**1.** 20 **2.** 27 **3.** 32 **4.** 10 **5.** 42 **6.** 168
299	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** 360 **2.** $\frac{360^\circ}{n}$ **3.** 1. a 2. d 3. ç 4. b **4.** 36 **5.** 75 **6.** 150 **7.** 90 **8.** $6\sqrt{2}$ **9.** D **10.** D **11.** C
301	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** 10 **2.** 21 **3.** 8 **4.** 5 **5.** 13 **6.** 12 **7.** 17 **8.** 64 **9.** 40 **10.** D **11.** A **12.** C **13.** B **14.** B **15.** A **16.** C **17.** B
304	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** 12 **2.** 27 **3.** 52 **4.** $30\sqrt{10}$ **5.** 38 400 **6.** 1740 **7.** 300 **8.** B **9.** C **10.** E **11.** B **12.** C **13.** D **14.** A **15.** C **16.** B **17.** B
307	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4	**1.** $\frac{3}{4}$ **2.** 9 **3.** 14 **4.** $\frac{30}{7}$ **5.** 114 **6.** 216 **7.** C **8.** A **9.** D **10.** D **11.** A

10.6. UZAY GEOMETRİ

SAYFA NO	ÖLÇME TÜRÜ	CEVAP ANAHTARI
319	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) 288 b) 336 c) 288 **2.** $10\sqrt{2}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **4.** 40 **5.** 110 **6.** 3 **7.** 170
333	ALIŞTIRMALAR	**1.** 96 **2.** $24\sqrt{35}$ **3.** $h = 2\sqrt{6}$, Hacim $= 18\sqrt{2}$ **4.** $8\sqrt{3}$ **5.** 180 **6.** 112
334	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** 12 **2.** 8 **3.** $a \cdot b \cdot c$ **4.** 81 **5.** $16\sqrt{2}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **7.** 4 **8.** 64 **9.** B **10.** E **11.** A **12.** D **13.** C **14.** D **15.** E **16.** C **17.** A **18.** C **19.** B
337	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** a^3 **2.** yanal alan **3.** $\frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ **4.** 192 **5.** $\frac{1}{8}$ **6.** $2\sqrt{3}$ **7.** $\frac{28}{15}$ **8.** D **9.** A **10.** B **11.** D **12.** B **13.** C **14.** A **15.** C **16.** B **17.** C **18.** E
340	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** küp **2.** $\frac{1}{3}$ **3.** 11 **4.** 6 **5.** 50 **6.** C **7.** A **8.** B **9.** C **10.** A **11.** C **12.** D **13.** D

SÖZLÜK

A

açı	:	Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimi.
açıortay	:	Bir açıyı iki eş parçaya ayıran ışın.
alt küme	:	Bir kümenin elemanlarının bazılarıyla oluşan küme.
analitik düzlem	:	Dik koordinat sisteminin belirttiği düzlem.
apsis	:	Koordinat sistemindeki bir noktanın birinci bileşenidir.
aralık	:	İki sayı arasındaki açıklık.
ayrık olay	:	Aynı anda gerçekleşmeyen ya da aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylar.
ayrık olmayan olay	:	Aynı anda gerçekleşmesi olası ya da aynı anda gerçekleşen olaylar.

B

benzer üçgen	:	Karşılıklı açı ölçüleri eşit, kenar uzunlukları biri diğerinin katı olan üçgenler.
bileşke fonksiyon	:	Verilen iki fonksiyondan elde edilen yeni fonksiyon.
bire bir fonksiyon	:	Tanım kümesindeki her elemanı değer kümesindeki farklı bir elemanla eşleyen fonksiyon.
bire bir ve örten fonksiyon	:	Hem bire bir hem de örten olan fonksiyon.
birim fonksiyon	:	Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü kendisine eşit olan fonksiyon.
boş küme	:	Hiç elemanı olmayan küme.

C - Ç

çarpanlara ayırma	:	Bir polinomu indirgenemeyen bazı polinomların çarpımı biçiminde yazma.
çevre	:	Bir çokgenin kenar uzunlukları toplamı.
çokgensel bölge	:	Bir çokgen ile iç bölgesinin birleşimi.
çözüm kümesi	:	Bir denklemi veya eşitsizliği sağlayan sayıların kümesi.

D

değer kümesi	:	A dan B ye tanımlanmış bir fonksiyonda B kümesine verilen ad.
deney	:	Sonuçları belirlenebilen olay.
denklem	:	İçerisinde bilinmeyen bulunan ve bu bilinmeyenin bazı değerleri için sağlanan eşitlik.
denklemin çözüm kümesi:	:	Bir denklemin köklerinin kümesi.
denklem sistemi	:	En az iki denklemin meydana getirdiği sistem.
diskriminant	:	$a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac$ sayısı.
düzgün çokgen	:	Tüm kenar uzunlukları ve tüm iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgen.
düzlem	:	Uzunluğu ve genişliği, düz ve sınırsız genişletilebilen fakat kalınlığı bulunmayan geometrik terim.

E

eş olumlu örneklem uzay : Olasılıkları eşit hilesiz bir örneklem uzayına ait olaylar.

eşitsizlik : İçinde $<, \leq, >, \geq$ sembolleri ve sayılar bulunduran cebirsel ifade.

eşit fonksiyon : $f, g: A \to B$ ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x) \in B$ olan f ile g fonksiyonları.

eşit polinomlar : Aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olan polinomlar.

F

faktöriyel : 1 den n e kadar olan ardışık tam sayıların çarpımı.

fonksiyon : Tanım kümesindeki her elemanı değer kümesindeki bir ve yalnız bir elemana eşleyen bir bağıntı.

fonksiyonun grafiği : Fonksiyona ait ikililerin analitik düzlemde meydana getirdiği şekil.

I - İ

ikinci derece denklem : $a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki denklem.

M

mutlak değer : Bir sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı.

O - Ö

olasılık : Bir olayın gerçekleşmesinin ya da gerçekleşmemesinin matematiksel olarak ifadesi.

olay : Örnek uzayın her bir alt kümesi.

olayın tümleyeni : Bir evrensel kümenin herhangi bir alt kümesinin tümleyeni bu alt kümeye ait olmayıp evrensel kümeye ait olan tüm elemanların kümesidir.

ordinat : Koordinat sistemindeki bir noktanın ikinci bileşenidir.

orijin : Dik koordinat sistemlerinde yatay ya da dikey doğruların kesim noktası.

örnek uzay : Bir deneyin olabilir tüm sonuçlarının oluşturduğu tüm küme.

örten fonksiyon : Değer kümesinde eşleşmeyen elemanı kalmayan fonksiyon.

P - R - S

parçalı tanımlı fonksiyon : Tanım kümesinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallar geçerli olan fonksiyon.

sabit fonksiyon : Görüntü kümesi yalnız bir elemandan oluşan fonksiyon.

sabit polinom : $a \neq 0$ için, $P(x) = a$ polinomu.

sabit terim : $P(x)$ polinomunda x ten bağımsız olan terim.

sıfır polinomu : $P(x) = 0$ polinomu.

T

tanım kümesi : Bir fonksiyonu tanımlı yapan ve o fonksiyonun bağımsız değişkenlerinin ait olduğu küme.

KAYNAKÇA

Aydın, C. (1988). Abdülhamîd b. Vâsi‘ b. Türk. Türkiye Diyanet Vakfı Büyük İslam Ansiklopedisi Cilt 1. İstanbul: Türkiye Diyanet Vakfı Yayınları.
Cajori, F. (2015). Matematik Tarihi. (çev.: Deniz İlalan). Ankara: ODTÜ Yayıncılık.
Crilly, T. (2014). Gerçekten Bilmeniz Gereken 50 Matematik Fikri. (çev.: Cem Duran). İstanbul: Domingo Yayınları.
Çimen, C. vb. (2009). Şifrelerin Matematiği: Kriptografi. Ankara: ODTÜ Yayıncılık.
Fazlıoğlu, İ. (1997). Hârizmî, Muhammed b. Mûsâ. Türkiye Diyanet Vakfı Büyük İslam Ansiklopedisi Cilt 16. İstanbul: Türkiye Diyanet Vakfı Yayınları.
Mazur, J. (2017). Matematik Sembollerinin Kısa Tarihi. (çev.: Barış Gönülşen). İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.
Salih Zeki. (2007). Âsâr-ı Bakiye. Cilt 2. İstanbul: Babil Yayınları.
Türkçe Sözlük (2012). (hzl.:Akalın, Ş. H. vb.). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
Unat, Y. (2007). Ebü'l-Feth Gıyâsüddîn Ömer b. İbrâhîm el-Hayyâm Türkiye Diyanet Vakfı Büyük İslam Ansiklopedisi Cilt: 34. İstanbul: Türkiye Diyanet Vakfı Yayınları.
T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı (2018). Ankara.
Yazım Kılavuzu (2012). (hzl.:Akalın, Ş. H. vb.). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Kindi.html (Erişim: 13.08.2017, 10.30).
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pascal.html (Erişim: 15.07.2017, 13.45).
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html (Erişim: 12.09.2017, 09.22).

GÖRSEL KAYNAKÇA

www.shutterstock.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
www.dreamstime.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
Komisyonumuzun görsel tasarım uzmanlarının orijinal çizimleri.

Kaynakça APA 6 formatına göre düzenlenmiştir.